کد کنترل

669

A

669A

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

صبح جمعه
۹۷/۱۲/۳
دفترچهٔ شمارهٔ (۱)

آزمون ورودی دورهٔ دکتری (نیمه‌متمرکز) ــ سال ۱۳۹۸

رشتهٔ آمار ــ کد (۲۲۳۲)

تعداد سؤال: ۴۵

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شمارهٔ سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شمارهٔ	تا شمارهٔ
۱	مجموعه دروس تخصصی: مبانی آنالیز ریاضی ــ ریاضی عمومی ۱و۲ ــ مبانی احتمال ــ احتمال ۱و۲ ــ استنباط آماری ۱	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین‌حساب مجاز نیست.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

۱۳۹۸

*** داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به‌منزلهٔ عدم حضور شما در جلسهٔ آزمون است.**

اینجانب .... با شمارهٔ داوطلبی .... در جلسهٔ این آزمون شرکت می‌نمایم. امضا:

۱- مقدار $\lim\limits_{x\to ۰} (۱+x)^{\frac{۲}{x}}$ کدام است؟

۱) $۲e^{۲}$

۲) $\frac{۱}{۲}e^{۲}$

۳) $\frac{۱}{۲}e$

۴) $e^{۲}$

۲- تابع زیر به ازای چه مقادیری از a و b، در نقطه $x=b$ مشتق‌پذیر است؟

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-x^{۲}}{۲}+a & x\le b\\ \frac{۱}{x} & x>b\end{cases}$$

۱) $a=\frac{۲}{۳}\ ,\ b=\frac{۱}{۲}$

۲) $a=۱\ ,\ b=\frac{۲}{۳}$

۳) $a=\frac{۱}{۲}\ ,\ b=\frac{۱}{۲}$

۴) $a=\frac{۳}{۲}\ ,\ b=۱$

۳- اگر $x^{۲}=\frac{۱-y^{۲}}{۱+y^{۲}}$، آنگاه $\left(\frac{dx}{dy}\right)^{۲}$ کدام است؟

۱) $\frac{۱-x^{۴}}{۱+y^{۴}}$

۲) $\frac{۱+x^{۴}}{۱-y^{۴}}$

۳) $\frac{۱-x^{۴}}{۱-y^{۴}}$

۴) $\frac{۱+x^{۴}}{۱+y^{۴}}$

۴- فرض کنیم f بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد. تابع $F:[a,b]\to \mathbb{R}$ را به‌صورت $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ تعریف می‌کنیم. کدام گزینه نادرست است؟

۱) F پیوسته است.

۲) F بر $[a,b]$ کران‌دار است.

۳) F بر $[a,b]$ صعودی است.

۴) اگر f پیوسته باشد آن‌گاه F مشتق‌پذیر است.

۵- مقدار $\int_0^\pi \frac{x\sin x\,dx}{1+\cos^2 x}$ کدام است؟

۱) $\frac{\pi^2}{8}$

۲) $\frac{\pi}{8}$

۳) $\frac{\pi^2}{4}$

۴) $\frac{\pi}{4}$

۶- برای هر عدد طبیعی n، مقدار $\int_0^1 (\ln x)^n dx$ کدام است؟

۱) $(-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

۲) $(-1)^n (2^n - n)$

۳) $(-1)^n n$

۴) $(-1)^n n!$

۷- مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i-1}{n}}$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{2}{3}$

۳) $\frac{3}{2}$

۴) وجود ندارد.

۸- مقدار $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\log(n)\right)$ کدام است؟

۱) $\circ$

۲) $+\infty$

۳) $\frac{1}{e}$

۴) e

۹- اگر $a>\circ$، آنگاه مقدار $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(a+1)...(a+n)}}{n}$ کدام است؟

۱) a

۲) 1

۳) $\frac{1}{e}$

۴) e

۱۰- مقدار $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{n}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$

۲) $\ln\frac{2}{3}$

۳) $\ln\frac{3}{2}$

۴) $\frac{2}{3}$

۱۱- اگر $A=\left\{\alpha\in(\circ,\infty)\mid\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha^{\ln n}<\infty\right\}$، آنگاه A کدام است؟

۱) $(\circ,\frac{1}{e})$

۲) $(\circ,1)$

۳) $(\circ,\frac{1}{\sqrt{e}})$

۴) $\varnothing$

۱۲- بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})(x-1)^n$ کدام است؟

۱) $[0,2)$

۲) $\left[1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right)$

۳) $[0,2]$

۴) $\left[1-\frac{1}{e}, 1+\frac{1}{e}\right]$

۱۳- مقدار $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} dxdy$ کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) ۳

۴) ۴

۱۴- سکه‌ای را بی‌نهایت بار پرتاب می‌کنیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش متناظر با کدام‌یک از مجموعه‌های زیر است؟

۱) Z ۲) Q ۳) $[0,1]$ ۴) $\{0,1,2,\dots\}$

۱۵- از بین ۱۲ کارت شماره‌گذاری شده از ۱ تا ۱۲ تعداد ۵ کارت به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌شود. احتمال اینکه میانه شماره کارت‌های انتخابی عدد ۸ باشد، کدام است؟

۱) $\frac{14}{1320}$

۲) $\frac{14}{99}$

۳) $\frac{7}{44}$

۴) $\frac{7}{17}$

۱۶- فرض کنید $X \sim U(0,1)$ و $Y \sim U(0,2)$ دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. مقدار $E(F_X(Y))$ کدام است؟

۱) ۱

۲) $\frac{1}{2}$

۳) $\frac{1}{4}$

۴) $\frac{3}{4}$

۱۷- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع زیر باشد. مقدار $P([X]>1)$ کدام است؟ ($[X]$ نمایانگر جز صحیح X است)

$$F(x)=\frac{x}{1+x}\,,x>0$$

۱) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{1}{3}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{3}{4}$

۱۸- فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته باشد که امید ریاضی آن وجود دارد. مقدار $\lim\limits_{n\to\infty} nP(X\geq n+1)$ کدام است؟

۱) 0

۲) $\frac{1}{2}$

۳) 1

۴) ∞

۱۹- فرض کنید $X \sim Exp(1)$ باشد. اگر Y به صورت زیر تعریف شود، تابع چگالی احتمال Y کدام است؟

$$Y=\begin{cases} X & X\leq 1 \\ \frac{1}{X} & X>1 \end{cases}$$

۱) $f_Y(y)=e^{-y}\,,\ y>0$

۲) $f_Y(y)=\frac{1}{2}e^{-y}+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{y}}\,,\ y>0$

۳) $f_Y(y)=\frac{e}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}\,,\ 0<y<1$

۴) $f_Y(y)=e^{-y}+\frac{1}{y^2}e^{-\frac{1}{y}}\,,\ 0<y<1$

۲۰- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با مقادیر ممکن صحیح نامنفی باشد. اگر $G(s)$ نمایانگر تابع مولد احتمال X و $G^{(k)}(s)$ مشتق مرتبه k ــ ام تابع مولد احتمال در نقطه s باشند، مقدار $E(X^3)$ کدام است؟

۱) $G^{(3)}(1)-3G^{(2)}(1)+G^{(1)}(1)$

۲) $G^{(3)}(1)+3G^{(2)}(1)-G^{(1)}(1)$

۳) $G^{(3)}(1)+2G^{(2)}(1)+3G^{(1)}(1)$

۴) $G^{(3)}(1)+3G^{(2)}(1)+G^{(1)}(1)$

۲۱- فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی گسسته با مقادیر ممکن صحیح نامنفی و تابع مولد احتمال توأم $g(t_1, t_2) = \exp\left[2(t_1 - 1) + 3(t_2 - 1) + 4(t_1 t_2 - 1)\right]$ باشند. مقدار $P\left[X + Y \neq 1\right]$ کدام است؟

۱) $1 - 9e^{-5}$

۲) $5e^{-9}$

۳) $1 - 5e^{-9}$

۴) $9e^{-5}$

۲۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ و $Y_1, \dots, Y_n$ دو نمونه تصادفی مستقل از توزیع برنولی با پارامتر $p = \frac{1}{2}$ باشند. اگر $Z_i = X_i - Y_i$ ، $i = 1, \dots, n$ ، مقدار $E\left[(\sum_{i=1}^{n} Z_i)^2\right]$ کدام است؟

۱) n

۲) $\frac{n}{2}$

۳) $\frac{n^2}{2}$

۴) $\frac{n^2}{4}$

۲۳- فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع توزیع زیر باشد. همچنین فرض کنید Y یک متغیر تصادفی دو مقداری با تابع احتمال شرطی $P\left[Y = 2 \mid X = x\right] = x, P\left[Y = 0 \mid X = x\right] = 1 - x$ باشد. اگر $Y_1, \dots, Y_n$ یک نمونه تصادفی از Y باشد، مقدار $P\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i = 2n\right]$ کدام است؟

$$F(x) = x^\theta, 0 < x < 1, \theta > 1$$

۱) $(\frac{1}{1+\theta})^n$

۲) $(\frac{\theta}{1+\theta})^n$

۳) $(\frac{1}{1+\theta})^{2n}$

۴) $(\frac{\theta}{1+\theta})^{2n}$

۲۴- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع توزیع زیر باشد. توزیع حدی $Y_n = X_{(1)}^n$ کدام است؟ $(X_{(1)} = \min(X_1,...,X_n))$

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{x}, \ 1 \le x < \infty$$

۱) $F_Y(y) = 1 - \frac{1}{y}, \ y \ge 1$

۲) $F_Y(y) = 1 - \frac{1}{y^2}, \ y \ge 1$

۳) $F_Y(y) = 1 - e^{y^{-\frac{1}{2}}}, \ y > 0$

۴) تباهیده در نقطه ۱

۲۵- فرض کنید $X_1, X_2, ...$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با $X_n \sim B(n,p)$، $n \ge 1$، باشد. اگر $T_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{n - X_n}}$، توزیع حدی T_n کدام است؟ $(q = 1 - p)$

۱) $N(0,q)$

۲) $N(0,p)$

۳) $N(0,1+q)$

۴) $N(0,1+p)$

۲۶- فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد:

$$f_x(x) = \begin{cases} p + (1-p)e^{-\lambda} & x = 0 \\ (1-p)\dfrac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} & x = 1, 2, ... \end{cases}$$

اگر p معلوم باشد آماره‌ی بسنده برای λ کدام است؟ $\left(I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases} \right)$

۱) $\left(\sum_{i=1}^{n} I_{\{0\}}(X_i), \sum_{i=1}^{n} I_{\{1,2,...\}}(X_i) \right)$

۲) $\left(\sum_{i=1}^{n} I_{\{0\}}(X_i), \sum_{i=1}^{n} X_i I_{\{1,2,...\}}(X_i) \right)$

۳) $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i I_{\{0\}}(X_i), \sum_{i=1}^{n} X_i I_{\{1,2,...\}}(X_i) \right)$

۴) $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i I_{\{0\}}(X_i), \sum_{i=1}^{n} I_{\{1,2,...,n\}}(X_i) \right)$

۲۷- فرض کنید $X_i \sim U(\theta - i, \theta + i)$ ، $i = 1, \dots, n$، متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند. آماره‌ی بسنده مینیمال برای θ کدام است؟

۱) $(\max_{1\le i\le n}\{X_i\}, \min_{1\le i\le n}\{X_i\})$

۲) $(\max_{1\le i\le n}\{X_i\}, \min_{1\le i\le n}\{X_i + i\})$

۳) $(\max_{1\le i\le n}\{X_i - i\}, \min_{1\le i\le n}\{X_i + i\})$

۴) $(\max_{1\le i\le n}\{X_i + i\}, \min_{1\le i\le n}\{X_i - i\})$

۲۸ـ خانواده توزیع‌ها با تابع چگالی احتمال‌های $\left\{f_\theta : \theta \in \Theta \subseteq R^+\right\}$، که در آن f_θ به صورت زیر است را در نظر بگیرید. اگر $0 < c < d$ مقدارهای معلوم باشند، به ازاء کدام‌یک از موارد زیر این خانواده کامل است؟

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^2} \quad , \ \theta < x < \infty \ , \ \theta > 0$$

۱) $\Theta = (0, d)$

۲) $\Theta = (c, d)$

۳) $\Theta = (0, c)$

۴) $\Theta = (c, \infty)$

۲۹- بر اساس تک مشاهده X از توزیعی با تابع احتمال زیر، کدام مورد صحیح است؟

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta & x = 0 \\ 3\theta & x = 1 \\ 1 - 4\theta & x = 2 \end{cases} \quad , \ 0 < \theta < \frac{1}{4}$$

۱) خانوادهٔ توزیع‌های X کامل است.

۲) خانوادهٔ توزیع‌های X بسنده و کامل است.

۳) خانواده توزیع‌های X کامل نیست و «برآوردگر نااریب صفر» آن عبارت است از: $g(x) = \begin{cases} a & x = 0 \\ -3a & x = 1 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

۴) خانواده توزیع‌های X کامل نیست و «برآوردگر نااریب صفر» آن عبارت است از: $g(x) \begin{cases} -3a & x = 0 \\ a & x = 1 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$

۳۰- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر گشتاوری θ کدام است؟

$$f_\theta(x) = \frac{3(x+\theta)(\theta-x)}{4\theta^3}, \quad -\theta < x < \theta \ , \ \theta > 0$$

۱) $\sqrt{\frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

۲) $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$

۳) $\frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

۴) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

۳۱- اگر $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد، برآوردگر گشتاوری پارامتر θ کدام است؟
$f_\theta(x) = \theta e^{-x}(1-e^{-x})^{\theta-1}, \ x > 0, \theta > 0$

۱) $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}}$

۲) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}$

۳) $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i}} - 1$

۴) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e^{-X_i} - 1$

۳۲- فرض کنید ۲ و ۳ و ۲ یافته‌های یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. برآورد ماکزیمم درستنمایی θ کدام است؟

$$f_\theta(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}\theta & x=1\\ \frac{1}{2}\theta & x=2\\ 1-\frac{5}{6}\theta & x=3\end{cases}\quad ,\quad 0\le\theta\le\frac{6}{5}$$

۱) $\frac{6}{5}$

۲) $\frac{4}{5}$

۳) $\frac{3}{5}$

۴) $\frac{2}{5}$

۳۳- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. برآوردگر ماکزیمم درستنمایی برای (θ_1,θ_2) کدام است؟

$$f_{\theta_1,\theta_2}(x)=\begin{cases}\theta_1 & x=1\\ \frac{1-\theta_1}{\theta_2-1} & x=2,\dots,\theta_2\end{cases}\quad ,\ 0\le\theta_1\le1,\ \theta_2=\{2,3,\dots\}$$

۱) $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\ ,\ \max_{1\le i\le n}(X_i)\right)$

۲) $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{\{1\}}(X_i)\ ,\ \max_{1\le i\le n}(X_i)\right)$

۳) $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\ ,\ \max\{2,\max_{1\le i\le n}(X_i)\}\right)$

۴) $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}I_{\{1\}}(X_i)\ ,\ \max\left\{2,\max_{1\le i\le n}(X_i)\right\}\right)$

۳۴- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر p باشد. اگر $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$ ، برای $m \le n$، برآوردگر UMVU پارامتر $\gamma(p)=(pe^2+q)^m$ کدام است؟ $(q=1-p)$

۱) $(\bar{X}e^2+1-\bar{X})^m$

۲) $\sum_{x=0}^{m} \frac{e^{2x}\binom{n-m}{S-x}}{\binom{n}{S}}$

۳) $\sum_{x=0}^{m} e^{2x}\frac{\binom{m}{x}\binom{n-m}{S-x}}{\binom{n}{S}}$

۴) بهترین برآوردگر نااریب وجود ندارد.

۳۵- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $N(\theta,1)$ باشد. مقدار $E(e^{X_1} \mid \bar{x})$ کدام است؟

۱) $e^{\bar{x}}$

۲) $e^{\bar{x}-\frac{n+1}{2n}}$

۳) $e^{\bar{x}+\frac{n+1}{2n}}$

۴) $e^{\bar{x}+\frac{n-1}{2n}}$

۳۶- فرض کنید $X_1,\dots,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت بر بازهٔ $(\theta_1-\theta_2,\theta_1+\theta_2)$ باشد که $\theta_1 \in R$ و $\theta_2 > 0$. برآوردگر UMVU پارامتر θ_2 کدام است؟

۱) $2(X_{(n)}-X_{(1)})$

۲) $\frac{n+1}{2(n-1)}(X_{(n)}-X_{(1)})$

۳) $\frac{n-1}{2(n+1)}(X_{(n)}-X_{(1)})$

۴) $\frac{2(n-1)}{n+1}(X_{(n)}-X_{(1)})$

۳۷- فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع پواسون بریده شده در صفر با تابع احتمال زیر است. برآوردگر UMVU پارامتر $1-e^{-\theta}$ کدام است؟

$$f_\theta(x)=\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!(1-e^{-\theta})} \;,\; x=1,2,\dots \;,\; \theta>0$$

۱) $2X$

۲) $2I_{\{1,3,\dots\}}(X)$

۳) $2I_{\{2,4,\dots\}}(X)$

۴) $2I_{\{2,4,\dots\}}(X)+I_{\{1,3,\dots\}}(X)$

۳۸- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع برنولی با پارامتر $\theta \in [0,1]$ باشد، با در نظر گرفتن پیشین $\theta = 0,1$ ، $\pi(\theta) = \frac{1}{2}$ ، تحت تابع زیان دلخواه $L(\theta,\delta)$ کدام یک از موارد زیر برآوردگر بیز برای θ نیست؟

۱) $\frac{\bar{X}+1}{2}$

۲) $\bar{X}$

۳) $\prod_{i=1}^{n} X_i$

۴) $X_{(1)} = \min(X_1,...,X_n)$

۳۹- سکه‌ای که شانس مشاهده شیر در آن برابر p است را ۱۰ بار پرتاب می‌کنیم. اگر p دارای پیشین یکنواخت بر بازه $(0,1)$ باشد، چند بار بایستی شیر مشاهده شود تا مقدار برآورد ماکزیمم درستنمایی با مقدار برآورد بیز p برابر باشد؟ (تابع زیان را مربع خطا در نظر بگیرید).

۱) ۵

۲) ۶

۳) ۱۰

۴) هیچگاه برآوردگر بیز نمی تواند با MLE برابر باشد.

۴۰- فرض کنید $X_1,...,X_n$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(0,\theta)$ باشد. با در نظر گرفتن تابع زیان مربع خطای وزنی با وزن $w(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$ و توزیع پیشین $Pa(\alpha,\theta_0)$ با تابع چگالی احتمال زیر، برآورد بیز θ کدام است؟

$$\pi(\theta) = \frac{\alpha\theta_0^\alpha}{\theta^{\alpha+1}} \ , \ \theta > \theta_0$$

۱) $\frac{n+\alpha+2}{n+\alpha+1}[\max(\theta_0, x_{(n)})]^2$

۲) $\frac{n+\alpha+2}{n+\alpha+1}\max(\theta_0, x_{(n)})$

۳) $\frac{n+\alpha+2}{n+\alpha+1}\min(\theta_0, x_{(n)})$

۴) $\frac{n+\alpha+2}{n+\alpha+1}[\min(\theta_0, x_{(n)})]^2$

۴۱- فرض کنید $X_1,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با پارامتر نامعلوم θ باشد. اگر θ دارای تابع چگالی احتمال پیشین $\pi(\theta)$ باشد، تحت تابع زیان زیر، برآورد بیز پارامتر θ کدام است؟

$$L(\theta,\delta) = \begin{cases} k_1(\theta-\delta) & \theta > \delta \\ k_2(\delta-\theta) & \theta \le \delta \end{cases} , (k_1,k_2 > 0)$$

۱) مُد توزیع پسین

۲) میانه توزیع پسین

۳) چندک مرتبه $\frac{k_1}{k_1+k_2}$ توزیع پسین

۴) چندک مرتبه $\frac{k_2}{k_1+k_2}$ توزیع پسین

۴۲- فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر θ باشد. اگر $\Theta = [0, c]$ که در آن c مقداری معلوم است. در کلاس برآوردگرهای $D = \{a\bar{X} : 0 < a \leq 1\}$ برآوردگر مینیماکس θ تحت تابع زیان مربع خطا کدام است؟

۱) $\bar{X}$

۲) $\frac{1}{c+1}\bar{X}$

۳) $\frac{c}{c+1}\bar{X}$

۴) $\frac{nc}{nc+1}\bar{X}$

۴۳- فرض کنید $X \mid \theta \sim U(0, \theta)$ و $\theta \sim \Gamma(2, \lambda)$ باشد. با در نظر گرفتن تابع زیان مربع خطا و برآورد λ به روش ماکزیمم درستنمایی، برآوردگر بیز تجربی θ کدام است؟

۱) $2X$ برآوردگر بیز تجربی θ است.

۲) $X + \frac{1}{X}$ برآوردگر بیز تجربی θ است.

۳) $\frac{1}{2}X$ برآوردگر بیز تجربی θ است.

۴) $2X + \frac{1}{2X}$ برآوردگر بیز تجربی θ است.

۴۴- فرض کنید $X \mid \sigma^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{(v)}$ و $\sigma^2 \sim I\Gamma(1, \frac{\alpha}{2})$ (α معلوم) باشند. با در نظر گرفتن تابع زیان مربع خطا، کدام مورد در برآورد σ^2 درست است؟ $\left(Y \sim I\Gamma(\alpha, \beta) \rightarrow f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{y^{\alpha+1}} e^{-\frac{\beta}{y}}, y > 0\right)$

۱) $\frac{X}{v+2}$ برآوردگر مجاز (پذیرفتنی) برای σ^2 است.

۲) $\frac{X+\alpha}{v+1}$ برآوردگر بیز و مجاز (پذیرفتنی) برای σ^2 است.

۳) $\frac{X+\alpha}{v}$ برآوردگر بیز و مجاز (پذیرفتنی) برای σ^2 است.

۴) $\frac{X}{v}$ برآوردگر بیز تعمیم‌یافته و مجاز (پذیرفتنی) برای σ^2 است.

۴۵- فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی $n(>2)$ تایی از توزیع نمایی با میانگین $\frac{1}{\theta}$ باشد. با انتخاب توزیع پیشین ناسره با چگالی $\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta}$ و با در نظر گرفتن تابع زیان مربع خطا، کدام مورد درست است؟

۱) $\frac{n-2}{\Sigma X_i}$ برآوردگر بیز تعمیم‌یافته و غیرمجاز (ناپذیرفتنی) برای θ است.

۲) $\frac{n}{\Sigma X_i}$ برآوردگر بیز تعمیم‌یافته و مجاز (پذیرفتنی) برای θ است.

۳) $\frac{n-2}{\Sigma X_i}$ برآوردگر بیز تعمیم‌یافته و مجاز (پذیرفتنی) برای θ است.

۴) $\frac{n}{\Sigma X_i}$ برآوردگر بیز تعمیم‌یافته و غیرمجاز (ناپذیرفتنی) برای θ است.