

435

A

435A

محل امضا:

نام:

نام خانوادگی:

عصر جمعه  
۹۶/۲/۸«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.  
ایام خمینی (ره)»جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

## آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی ارشد فاپیوسته داخل – سال ۱۳۹۶

## آمار – کد ۱۲۰۷

مدت پاسخگویی: ۲۷۰ دقیقه

تعداد سوال: ۱۳۵

## عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سوالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سوال	تا شماره از شماره
۱	زبان عمومی و تخصصی (انگلیسی)	۳۰	۱
۲	دروس بایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال)	۴۵	۲۱
۳	دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونهگیری و رگرسیون)	۶۰	۷۶

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

**PART A: Vocabulary**

**Directions:** Choose the word or phrase (1), (2), (3), or (4) that best completes the blank. Then mark the correct choice on your answer sheet.

- 1- Working on the assembly line was ----- work because I did the same thing hour after hour.  
 1) efficacious      2) monotonous      3) momentous      4) erroneous
- 2- People are guilty of ----- when they make judgments before they know all of the facts.  
 1) illusion      2) arrogance      3) avarice      4) prejudice
- 3- Justin ----- himself from the embarrassing situation by pretending he had to make a telephone call.  
 1) extricated      2) extracted      3) exposed      4) expelled
- 4- He was accused of manipulating the financial records to cover his -----.  
 1) suspicion      2) scrutiny      3) fraud      4) paradox
- 5- Since the jungle was -----, we had to find an alternate route to the village.  
 1) permanent      2) vulnerable      3) redundant      4) impenetrable
- 6- Management refused to ----- the union's demands, so a strike costly to both sides occurred.  
 1) capitulate to      2) withdraw from      3) impose on      4) grump about
- 7- We had nothing in common, but despite our ----- backgrounds and interests, my new roommate and I became good friends by the end of the semester.  
 1) comprehensive      2) conscious      3) heterogeneous      4) haphazard
- 8- Megan's foreboding about going to class turned out to be ----- as the instructor gave a surprise test for which she was completely unprepared.  
 1) qualified      2) justified      3) perplexed      4) wholehearted
- 9- If she had known how much of an ----- her student debt would be, she would have found a different way to finance her education.  
 1) application      2) encumbrance      3) immunity      4) optimism
- 10- The mechanic examined the engine carefully but said he was not able to ----- the cause of the problem.  
 1) pinpoint      2) derive      3) acquire      4) escalate

**PART B: Cloze Passage**

**Directions:** Read the following passage and decide which choice (1), (2), (3), or (4) best fits each space. Then mark the correct choice on your answer sheet.

Horticulture has a very long history. The study and science of horticulture dates all the way back to the times of Cyrus the Great of ancient Persia, and has been going on (11) -----, with present-day horticulturists such as Freeman S. Howlett and Luther Burbank. The practice of horticulture can be retraced for (12) -----. The cultivation of taro and yam in Papua New Guinea dates back (13) ----- at least 6950–6440 cal BP. The origins of horticulture (14) ----- in the transition of human communities from nomadic hunter-gatherers to sedentary or semi-sedentary

horticultural communities, (15) ----- a variety of crops on a small scale around their dwellings or in specialized plots visited occasionally during migrations from one area to the next.

- |     |                            |               |                            |                 |
|-----|----------------------------|---------------|----------------------------|-----------------|
| 11- | 1) ever since              | 2) yet        | 3) that far                | 4) still        |
| 12- | 1) many thousands years    |               | 2) many thousands of years |                 |
|     | 3) years of many thousands |               | 4) many years of thousands |                 |
| 13- | 1) from                    | 2) for        | 3) in                      | 4) to           |
| 14- | 1) are laid                | 2) lay        | 3) lie                     | 4) are lying    |
| 15- | 1) cultivating             | 2) cultivated | 3) that cultivated         | 4) to cultivate |

### PART C: Reading Comprehension:

**Directions:** Read the following three passages and answer the questions by choosing the best choice (1), (2), (3), or (4). Then mark the correct choice on your answer sheet.

#### PASSAGE 1:

#### Constructing Means

In the classroom, the student is confronted with several notions of mean, and thus a pertinent question that an attentive student could pose is: “The word mean appears in all these concepts, so what is actually a mean?”

In this short article, I revisit Kolmogorov’s axiomatic view of the mean, which unifies all these concepts of mean, among others. While Kolmogorov’s axioms of probability are widely known (DeGroot and Schervish 2011, sec. 1.5), it is perhaps less well known that in an often-forgotten note, Kolmogorov also proposed an axiomatic construction for what a unifying concept of mean should be (Kolmogorov 1930). Let  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  and let  $\mathbf{1}$  denote a vector of ones. Formally, a “regular (type of) mean” (I follow the terminology of the English translation in Tikhomirov et al. (1991, p. 144).) is a map  $M: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , which obeys the following axioms:

- A1.  $M(\mathbf{x})$  is continuous and increasing in each variable.
- A2.  $M(\mathbf{x})$  is a symmetric function.
- A3.  $M(\mathbf{x1}_n) = \mathbf{x}$ , that is, the mean of repeated data equals the repeated value.
- A4. The mean of the combined sample,  $\mathbf{x}$ , remains unchanged if a part of the sample is replaced by its corresponding mean,  $m = M(x_1, \dots, x_{n_1})$ .

- |     |   |                   |              |               |
|-----|---|-------------------|--------------|---------------|
| 16- | The student is confronted with different notions of -----.    |                   |              |               |
|     | 1) probability  | 2) means          | 3) samples   | 4) statistics |
| 17- | Kolmogorov provided axioms in -----.                          |                   |              |               |
|     | 1) 1920   | 2) 1991           | 3) 1930      | 4) 1912       |
| 18- | The word “pertinent” in line 2 means -----.                   |                   |              |               |
|     | 1) head   | 2) easy           | 3) perfect   | 4) related    |
| 19- | The function $M(\mathbf{x})$ for constructing means is -----. |                   |              |               |
|     | 1) odd  | 2) even           | 3) symmetric | 4) complex    |
| 20- | What is well-known?   |                   |              |               |
|     | 1) Probability axioms   | 2) Mean axioms    |              |               |
|     | 3) Law axioms   | 4) Utility axioms |              |               |

**PASSAGE 2:****Deviation**

Deviation is a basic concept in probability and statistics. We shall use the word “deviation” to mean “absolute difference.” Thus, the deviation between two numbers  $a$  and  $b$  is  $|a - b|$ . Likewise, the deviation of each number  $a$  and  $b$  from their mid-point or their average  $(a + b)/2$ , is half the absolute difference between them, or  $|a - b|/2$ . Given  $n > 2$  numbers, we seek to find a single measure of spread that combines all possible pairwise deviations in a suitable way. The most widespread notion of this combined deviation is the standard deviation (SD); and a distant second is the mean (absolute) deviation (MD). What exactly are these quantities? Why is the former so popular relative to the latter and among many other notions of deviations?

To answer these questions, we must first address another basic question: What quantity do we wish to measure the deviations from? Such a quantity is often a measure of center. Again, there are several choices for a measure of center—the most common ones are the mean (or arithmetic mean) and the median. Other choices for the measure of center (such as the mode or the geometric mean or the harmonic mean) may be more appropriate in certain special situations. But we would not consider them in this article. We emphasize that the interpretation of any particular choice of spread goes hand in hand with the corresponding choice of center from which such a spread is measured.

- 21- The deviation between 5 and -2 is -----.**  
1) 7                    2) 3                    3) -7                    4) -3
- 22- How much is the deviation of each of a and b from their average?**  
1)  $|a - b|$             2)  $|a - b|/2$             3)  $2|a - b|$             4)  $|a + b|$
- 23- Which is the most common measure for a center of data?**  
1) Mode              2) Median              3) Mean              4) Geometric mean
- 24- Any particular choice of spread depends on -----.**  
1) data                2) choice of center  
3) size of data        4) kind of data
- 25- The phrase “widespread” in paragraph 1 means the -----.**  
1) common            2) deviated            3) largest            4) farthest

**PASSAGE 3:** **$\bar{X}$  and  $S^2$** 

We define sample mean  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  and sample variance  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  where

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  comprises a random sample from some population. It is well known that  $\bar{X}$  and  $S^2$  are independent if the population is normally distributed. Now, naturally we can ask a question: Are  $\bar{X}$  and  $S^2$  independent without the assumption of normality?

The answer to the above question is “No” according to the following theorem found in Lukacs (1942).

Theorem: *If the variance (or second moment) of a population distribution exists, then a necessary and sufficient condition for the normality of the population distribution is that  $\bar{X}$  and  $S^2$  are mutually independent.*

Remark: That the normality is a necessary condition for the independence between  $\bar{X}$  and  $S^2$  was first proved by Geary (1936) using a mathematical tool provided by R. A. Fisher, but the proof in Lukacs (1942) is easier to understand.

- 26- For a random sample,  $\bar{X}$  and  $S^2$  are always \_\_\_\_\_.  
1) independent                            2) uncorrelated  
3) uncorrelated under normality      4) dependent

27- Who proved the independence of  $\bar{X}$  and  $S^2$  under normality for the first time?  
1) Geary                                2) Fisher                            3) Lukas                            4) Pearson

28- Whose proof is easier?  
1) Geary's                                2) Fisher's                            3) Pearson's                            4) Lukacs'

29- A population is normal if and only if  $\bar{X}$  and  $S^2$  are \_\_\_\_\_.  
1) uncorrelated                        2) independent                            3) equal                                    4) unequal

30- The word "comprises" in line 2 means \_\_\_\_\_.  
1) realizes                                2) consists of                            3) completes                            4) agrees

دروس پایه (ریاضیات عمومی، مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی و مبانی احتمال):

- ۳۱- اگر  $z$  عددی مختلط و ناصفر باشد که  $z + \frac{1}{z} = 2\cos\alpha$  ، آنگاه  $z^n + \frac{1}{z^n}$  کدام است؟

$$\gamma \cos^n \alpha \text{ (c)}$$

$$vn \cos \alpha$$

$$\gamma^n \cos \alpha / \Gamma$$

$$\gamma \cos(n\alpha) \neq$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\Gamma(n + \frac{1}{4})}{\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

• (1)

1 (2)

e (r)

88 (f)

$$-\text{۳۴} - \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x + 3^{-x})^{\frac{1}{x}} \text{ کدام است؟}$$

۷۰

۶۲

9 (5)

10 (F)

۳۴ - مقدار  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  کدام است؟

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (2)$$

$$2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \quad (4)$$

۳۵ - طول منحنی تابع  $f(x) = \int_0^x \sqrt{\cosh(t)} dt$  بر بازه  $[0, 2]$  کدام است؟

$$\sqrt{\pi} \left(e - \frac{1}{e}\right) \quad (1)$$

$$\pi \left(e - \frac{1}{e}\right) \quad (2)$$

$$\sqrt{\pi} \left(e + \frac{1}{e}\right) \quad (3)$$

$$\pi \left(e + \frac{1}{e}\right) \quad (4)$$

۳۶ - اگر معادله  $e^x \cos(z+y) - xy - z^2 = 0$  متغیر  $x$  را به صورت تابعی مشتق بذیر از دو متغیر مستقل  $y$  و  $z$  تعریف

کند، مقدار  $\left. \frac{\partial x}{\partial z} \right|_{y=-1, z=1}$  در نقطه متناظر با کدام است؟

-1 (1)

0 (2)

1 (3)

2 (4)

۳۷ - صفحه مماس بر رویه  $S$  در نقطه دلخواه  $(a, b, c)$  واقع بر آن به صورت زیر است. اگر بدانیم رویه شامل نقطه

(1, 2, 3) است، معادله دکارتی رویه کدام است؟

$$(a+c)(x-a) - (b+c)(y-b) + (a-b)(z-c) = 0$$

$$x^2 - y^2 + 2xz - 2yz + 9 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - y^2 + xz - yz + 6 = 0 \quad (2)$$

$$2x^2 - 2y^2 + 2xz - yz + 6 = 0 \quad (3)$$

$$2x^2 - 2y^2 + 3xz - 2yz + 9 = 0 \quad (4)$$

۳۸ - مقدار انتگرال  $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^4 + 1} dx dy$  کدام است؟

(۱)

$$\frac{\sqrt{2}-1}{6}$$

$$\frac{\sqrt[4]{9}-1}{4}$$

$$\frac{2\sqrt{2}-1}{6}$$

۳۹ - اگر  $V$  ناحیه محدود به دو کره  $x^4 + y^4 + z^4 = 4$  و  $x^4 + y^4 + z^4 = 1$  و سطح خارجی ناحیه  $V$  و  $S$  باشد، شارگذرنده از سطح  $S$  توسط نیروی  $\vec{F}(x,y,z) = (\delta x^4 + 12xy^4, y^4 + e^y \sin z, \delta z^4 + e^y \cos z)$

کدام است؟

(۱)  $371\pi$ (۲)  $372\pi$ (۳)  $373\pi$ (۴)  $374\pi$ 

۴۰ - نقطه گزاره زیر کدام است؟

$A$  با زیرمجموعه‌ای از  $B$  هم عدد (هم‌توان) است ولی  $B$  با هیچ زیرمجموعه‌ای از  $A$  هم عدد نیست.

(۱)  $A$  با هیچ زیرمجموعه‌ای از  $B$  هم عدد نیست یا  $B$  با زیرمجموعه‌ای از  $A$  هم عدد است.

(۲)  $A$  با هیچ زیرمجموعه‌ای از  $B$  هم عدد نیست یا  $B$  با هر زیرمجموعه  $A$  هم عدد است.

(۳) مجموعه‌ای وجود دارد که اگر زیرمجموعه  $B$  باشد آنگاه با  $A$  هم عدد است یا  $B$  با هر زیرمجموعه  $A$  هم عدد است.

(۴) زیرمجموعه‌ای از  $B$  وجود دارد که با  $A$  هم عدد نیست یا اینکه  $B$  با زیرمجموعه‌ای از  $A$  هم عدد است.

۴۱ - فرض کنید  $\models$  رابطه دوتایی و  $F$  و  $G$  دو خاصیت باشند. کدام گزینه درست است؟

$$\forall x (F(x) \vee G(x)) \Rightarrow (\forall x F(x) \vee \forall x G(x)) \quad (۱)$$

$$(\forall x F(x) \Rightarrow \forall x G(x)) \Rightarrow \forall x (F(x) \Rightarrow G(x)) \quad (۲)$$

$$\forall x \exists y (x f y) \Rightarrow \exists y \forall x (x f y) \quad (۳)$$

$$\exists y \forall x (x f y) \Rightarrow \forall x \exists y (x f y) \quad (۴)$$

- ۴۲- ترتیب جدیدی به صورت زیر برای اعداد طبیعی  $\mathbb{N}$  تعریف می‌کنیم. کدام گزینه درست است؟

$$\dots, 2k+1, 2k-1, \dots, 5, 3, 1, 2, 4, 6, \dots, 2m, 2m+2, \dots$$

(۱) مجموعه اعداد زوج اینفیم ندارد.

(۲) مجموعه مضارب ۵ مینیمم دارد.

(۳) مجموعه اعداد فرد سوپریم دارد ولی اینفیم ندارد.

(۴) هر زیرمجموعه  $\mathbb{N}$  با ترتیب فوق ماکسیمال و مینیمال دارد.

- ۴۳- فرض کنید  $f_1: A_1 \rightarrow B_1$  و  $f_2: A_2 \rightarrow B_2$  دو تابع باشند. تابع  $f: A_1 \cup A_2 \rightarrow B_1 \cup B_2$  را با ضابطه زیر

$$f(a) = \begin{cases} f_1(a), & a \in A_1 \\ f_2(a), & a \notin A_1 \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. گزینه صحیح کدام است؟

(۱) ممکن است  $f_1$  و  $f_2$  هر دو یک به یک باشند ولی  $f$  یک به یک نباشد.

(۲) اگر  $f_1$  و  $f_2$  هر دو یک به یک باشند آنگاه  $f$  نیز یک به یک است.

(۳) اگر  $f_1$  و  $f_2$  هر دو پوشانند آنگاه  $f$  نیز پوشاند است.

(۴)  $f$  خوش تعریف نیست.

- ۴۴- فرض کنید  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر معادل یک به یک بودن تابع نیست؟

(۱) برای هر  $.f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$  :  $A, B \subseteq X$

(۲) برای هر  $.(f(A))^c \subseteq f(A^c)$  :  $A \subseteq X$

(۳) برای هر  $.f^{-1}(f(A)) \subseteq A$  :  $A \subseteq X$

$.A = B \Rightarrow f(A) = f(B)$  آنگاه  $f(A) = f(B)$  :  $A, B \subseteq X$  (۴)

- ۴۵- اگر تابع  $f: X \rightarrow Y$  یک به یک باشد آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $X$  شمارای نامتناهی باشد  $Y$  هم شمارای نامتناهی است.

(۲) اگر  $Y$  شمارای نامتناهی باشد  $X$  متناهی یا شماراست.

(۳) اگر  $Y$  شمارای نامتناهی باشد  $X$  هم شمارای نامتناهی است.

(۴)  $Y$  با هیچ زیرمجموعه‌ای از  $X$  هم عدد (هم‌توان) نیست.

-۴۶- دستگاه معادلات  $\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \end{cases}$  را درنظر بگیرید. اگر  $H$  زیرفضای حاصل از جواب‌های این دستگاه باشد

آن‌گاه بعد  $H$  به عنوان زیرفضای  $\mathbb{R}^3$  کدام است؟

۱) (۱)

۲) (۲)

۳) (۳)

۴) (۴)

-۴۷- فرض کنید  $A = \begin{pmatrix} 10 & 25 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$ . در این صورت  $A^{100}$  کدام ماتریس است؟

۱) (۱)

۲) (۲)

$$\begin{pmatrix} 10^{100} & 25^{100} \\ 0 & 10^{100} \end{pmatrix} \quad (۳)$$

$$\begin{pmatrix} 10^{100} & 25^{100} \\ 0 & -10^{100} \end{pmatrix} \quad (۴)$$

-۴۸- فرض کنید  $U$  فضای چند جمله‌ای‌های تولید شده توسط  $1, x^2, x^3, x^4$  و  $x^6$  روی  $\mathbb{R}$  باشد. مختصات بردار  $x^6 + x^4 - x^2 - 2$  در پایه مرتبت  $\{1 - x^2, x^2 - x^4, x^4 - x^6, 1 + x^6\}$  کدام است؟

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۴)$$

-۴۹- اگر  $A \in M_r(\mathbb{R})$  ، در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

.  $c \in \mathbb{R}$ ،  $\text{adj}(cA) = c^r \text{adj}A$  (۱)

.  $B \in M_r(\mathbb{R})$ ،  $\text{adj}(A + B) = \text{adj}A + \text{adj}B$  (۲)

.  $B \in M_r(\mathbb{R})$ ،  $\text{adj}(AB) = (\text{adj}A)(\text{adj}B)$  (۳)

.  $\det(\text{adj}A) = (\det A)^r$  (۴)

-۵۰ فرض کنید  $A \in M_n(\mathbb{R})$  و  $\text{rank}(A) = k > 0$ . در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

$$\text{rank}(A^\top) = k \quad (1)$$

$$\text{rank}(A^\top) < k \quad (2)$$

$\text{rank}(A_i) = 1$  و برای هر  $i$ ,  $A = \sum_{i=1}^k A_i$  موجودند که  $A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$  (۳)

$\text{rank}(A_i) = 1$  و برای هر  $i$ ,  $A = A_1 A_2 \dots A_k$  موجودند که  $A_1, \dots, A_k \in M_n(\mathbb{R})$  (۴)

-۵۱ فرض کنید  $A \in M_2(\mathbb{R})$  به ازای چند  $\epsilon > 0$  امکان پذیر است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴) نامتناهی

-۵۲ فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}$  تابعی پیوسته باشد. کدام گزینه درباره تابع  $f$  درست است؟

۱ (۱) یکبه‌یک است.

۲ (۲) تابع ثابت است.

۳ (۳) پوشش است.

۴ (۴) چنین تابعی قابل تعریف نیست.

-۵۳ فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  دو بار مشتق پذیر بوده و به ازای هر  $x \in \mathbb{R}$ , آنگاه  $f(1) + f'(1) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ .

کدام گزینه درست است؟

۱ (۱) تابعی زوج است.

۲ (۲) تابعی فرد است.

۳ (۳)  $f(2) < 0$

۴ (۴)  $f(2) > 0$

-۵۴ فرض کنید تابع حقیقی غیرثابت  $f$  بر  $[0, +\infty)$  مشتق پذیر باشد و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L > 0$ . کدام گزینه درست است؟

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = L \quad (3)$$

۴ (۴) تابع  $f'$  بر  $[0, +\infty)$  بی‌کران است.

-۵۵- فرض کنید  $f$  و  $g$  دو تابع پیوسته بر  $[a, b]$  باشند که  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$

اگر  $A = \{x \in [a, b] | f(x) = g(x)\}$  ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $A$  ناتهی باشد آنگاه  $A$  متناهی با بیش از یک عضو است.

(۲) اگر  $A$  ناتهی باشد آنگاه  $A$  نامتناهی است.

(۳) ممکن است  $A$  تک عضوی باشد.

(۴) ممکن است  $A$  تهی باشد.

-۵۶- فرض کنید  $A$  یک زیرمجموعه از اعداد حقیقی باشد بهطوری که  $\mathbb{Q} \subseteq A$  . کدام گزینه درباره  $A$  در فضای  $\mathbb{R}$  با متراclیدسی درست است؟

(۱) اگر  $A$  بسته باشد، آنگاه  $A = \mathbb{R}$

(۲) اگر  $A$  شمارا باشد، آنگاه  $A$  بسته است.

(۳) اگر  $A = \mathbb{R}$  ناشمارا باشد، آنگاه  $A = \mathbb{R}$

(۴) اگر  $A = \mathbb{R}$  باز باشد، آنگاه  $A = \mathbb{R}$

-۵۷- اگر  $A = \left\{ \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) - \frac{1}{m+1} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$  ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$\inf A = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sup A = 1 \quad (۱)$$

$$\inf A = \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sup A = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۲)$$

$$\inf A = -\frac{3}{2} \quad , \quad \sup A = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (۳)$$

$$\inf A = -\frac{3}{2} \quad , \quad \sup A = 1 \quad (۴)$$

-۵۸- فرض کنید  $A = \left\{ \frac{m}{\sqrt[n]{n}} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$  . کدام گزینه درباره  $A$  در فضای  $\mathbb{R}$  با متراclیدسی درست است؟

(۱) باز است ولی بسته نیست.

(۲) نه باز است و نه بسته.

(۳) بسته است ولی باز نیست.

(۴) هم باز است و هم بسته.

۵۹- تابع  $f$  بر بازه  $[1, \infty)$  با ضابطه زیر تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} \left[ \sin \frac{1}{x} \right] & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(منظور از نماد  $[x]$  جزو صحیح  $x$  است) کدام گزینه نادرست است؟

(۱) مجموعه نقاط نایپیوستگی  $f$  بسته است.

(۲) مجموعه نقاط نایپیوستگی  $f$  ناشمارا است.

(۳) مجموعه نقاط نایپیوستگی  $f$  نقطه حدی دارد.

(۴) نایپیوستگی های  $f$  در نقاط غیر صفر از نوع اساسی است.

۶۰- فرض کنید  $x \ln x$  و  $f(x) = \ln x$ , بر بازه  $(0, 1)$  کدام گزینه درست است؟

(۱)  $f$  و  $g$  هر دو پیوسته یکنواخت هستند.

(۲) هیچ کدام از توابع  $f$  و  $g$  پیوسته یکنواخت نیستند.

(۳)  $f$  پیوسته یکنواخت نیست ولی  $g$  پیوسته یکنواخت است.

(۴)  $f$  پیوسته یکنواخت است ولی  $g$  پیوسته یکنواخت نیست.

۶۱- فرض کنید  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$  دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر  $\left\{ \sqrt[n]{X_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  همگرا باشد آنگاه  $\left\{ \frac{X_{n+1}}{X_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  همگرا است.

(۲) اگر  $\left\{ \sqrt[n]{X_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  همگرا باشد آنگاه  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  همگرا است.

(۳) اگر  $\left\{ \frac{X_{n+1}}{X_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  همگرا باشد آنگاه  $\left\{ \sqrt[n]{X_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  همگرا است.

(۴) اگر  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  همگرا باشد آنگاه  $\left\{ \frac{X_{n+1}}{X_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$  همگرا است.

۶۲- فرض کنید  $x_n = \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$  و  $y_n = \frac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . کدام

گزینه درست است؟

(۱)  $\{x_n\}$  و  $\{y_n\}$  همگرا هستند و  $\lim x_n \geq \lim y_n$  ولی لزوماً برابر نیستند.

(۲)  $\{x_n\}$  و  $\{y_n\}$  همگرا هستند و  $\lim y_n \geq \lim x_n$  ولی لزوماً برابر نیستند.

(۳)  $\{x_n\}$  و  $\{y_n\}$  همگرا هستند و  $\lim x_n = \lim y_n$ .

(۴)  $\{x_n\}$  و  $\{y_n\}$  وابسته به انتخاب  $x_0$  و  $y_0$  ممکن است همگرا نباشد.

۶۳ - اگر  $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n}$  و  $B = \sum_{n=1}^{\infty} (-e)^n \left( \frac{n-1}{n} \right)^n$  ، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) سری B همگرا و سری A واگراست.

(۲) هر دو سری واگرا است.

(۳) سری A همگراست و سری B واگراست.

(۴) هر دو سری همگرا هستند.

۶۴ - مقادیر  $\alpha, \beta$  چه باشند تا فرمول زیر برای چند جمله‌ای‌های با حداقل درجه دقیق باشد؟

$$\int_0^1 \sqrt{x} f(x) dx = \alpha \int_0^1 f(x) dx + \beta \int_0^1 x f(x) dx$$

$$\alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{4}{5} \quad (1)$$

$$\alpha = \frac{4}{5}, \beta = \frac{1}{5} \quad (2)$$

$$\alpha = \frac{4}{15}, \beta = \frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\alpha = \beta = \frac{1}{3} \quad (4)$$

۶۵ - اگر A یک ماتریس حقیقی  $m \times n$  باشد و  $b \in R^m$  و  $x \in R^n$  ، گزینه درست در مورد مسئله

$$\min_{x \in R^n} \|Ax - b\|_2$$

(۱) مسئله جواب یکتا دارد.

(۲) مسئله می‌تواند جواب نداشته باشد.

(۳) مسئله نمی‌تواند جوابی با مقدار کمینه برابر با صفر داشته باشد.

(۴) مسئله یا یک جواب یکتا یا بی‌نهایت جواب دارد.

۶۶ - فرض کنید  $P_2$  چند جمله‌ای درجه دومی باشد که  $f$  را در نقاط هم فاصله  $x_0 + h$  ،  $x_0 + 2h$  و  $x_0 + 3h$  درون یابی

می‌کند. اگر مشتق سوم  $f$  روی  $[x_0, x_0 + 2h]$  با M کران دار باشد، یک کران بالای مناسب برای

$$|f'(x_0 + h) - P'_2(x_0 + h)|$$

$$\frac{1}{6} h^3 M \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} h^3 M \quad (2)$$

$$\frac{1}{3} h^3 M \quad (3)$$

$$\frac{3}{2} h^3 M \quad (4)$$

- ۶۷ فرض کنید  $i=0, 1, \dots, n, x_i = p(x)$  اعداد دو به دو متمایز و درون یاب چند جمله‌ای حداقل از درجه  $n$  در داده‌های  $(x_i, f(x_i))$  باشد. اگر  $x_0 = 0$ , جمله ثابت در چند جمله‌ای درون یاب  $(x)$  کدام است؟

$$f(x_0) \quad (1)$$

$$f(x_1) \quad (2)$$

$$f[x_0, x_1] \quad (3)$$

$$f[x_0, x_1] \quad (4)$$

- ۶۸ فرض کنید  $\{x_n\}$  با خاصیت  $f(x) = x - \frac{f(x)}{g(x)}$  و  $f(\alpha) = g(\alpha) \neq 0$ .  $g(x)$  روابطی بین  $f$  و  $g$  برقرار باشد تا دنباله  $\{x_{n+1}\}$  با صورت  $h(x_{n+1}) = h(x_n) = f(g(x_n))$  باشد؟ (فرض کنید  $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ )

$$f''(\alpha) = g(\alpha) + g'(\alpha), f'(\alpha) = g(\alpha) \quad (1)$$

$$f''(\alpha) = 2g(\alpha), f'(\alpha) = g(\alpha) \quad (2)$$

$$f''(\alpha) = 2g'(\alpha) + g(\alpha), f'(\alpha) = g(\alpha) \quad (3)$$

$$f''(\alpha) = 2g'(\alpha), f'(\alpha) = g(\alpha) \quad (4)$$

- ۶۹ در یک دستگاه ممیز شناور با مبنای ۸ که اعداد به صورت  $d_1d_2\dots d_{10} \times 8^e$  با  $d_1 \neq 0$  و  $0 \leq d_i \leq 7$  برای  $i=1, 2, \dots, 10$  نمایش داده می‌شوند، بیشترین فاصله بین دو عدد متوالی قابل نمایش چقدر است؟

$$8^{-10} \quad (1)$$

$$8^{22} \quad (2)$$

$$8^{53} \quad (3)$$

$$8^{63} \quad (4)$$

- ۷۰ در داده‌های زیر، با استفاده از نمودار جعبه‌ای، چند داده دور افتاده وجود دارد؟  
 ۱۴, ۱۸, ۱۲, ۴۴, ۳۴, ۶۶, ۳۷, ۱۴, ۳۴, ۱۴, ۷, ۲۳, ۱۴, ۲۲, ۲۱

$$0 \quad (1)$$

$$1 \quad (2)$$

$$2 \quad (3)$$

$$3 \quad (4)$$

۷۱ - به چند طریق می‌توان ۵ حرف A و ۶ حرف B را در یک ردیف قرار داد که از راست و چپ یکسان خوانده شوند؟

$$\frac{5!}{2!} \quad (1)$$

$$\frac{10!}{5!5!} \quad (2)$$

$$\frac{5!}{3!2!} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{11!}{5!6!} \quad (4)$$

۷۲ - کیسه‌ای شامل ۴ مهره قرمز و ۶ مهره آبی است. کیسه دیگری شامل ۱۶ مهره قرمز و تعدادی مجھول مهره آبی است. یک مهره به تصادف از هر کیسه انتخاب می‌شود، احتمال اینکه دو مهره انتخابی هم رنگ باشند  $\frac{4}{44}$  است. تعداد مهره‌های آبی کیسه دوم کدام است؟

(۱) ۴

(۲) ۶

(۳) ۱۲

(۴) ۲۰

۷۳ - فرض کنید  $A_1, \dots, A_n$  پیشامدهای مستقلی باشند بهطوری که برای هر  $i = 1, \dots, n$  داشته باشیم

$$P(A_i) = \frac{1}{i+1}. \text{ احتمال اینکه حداقل یکی از } A_i \text{ ها رخ دهد کدام است؟}$$

$$\frac{1}{n+1} \quad (1)$$

$$\frac{n}{n+1} \quad (2)$$

$$\frac{n-1}{n} \quad (3)$$

$$\frac{1}{n} \quad (4)$$

۷۴ - از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$  تعداد ۶ عدد را به تصادف و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه کوچکترین عدد انتخابی از ۴ بزرگتر باشد، کدام است؟

$$\left(\frac{3}{5}\right)^6 \quad (1)$$

$$\frac{3}{5} \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^6 \quad (3)$$

$$\frac{1}{210} \quad (4)$$

۷۵ - فرض کنید  $P(A | B) = \frac{3}{4}$  و  $P(B^c | A) = \frac{1}{4}$  و  $P(B | A^c) = \frac{3}{4}$  اگر  $P(A) = ?$

$$\frac{1}{4} (1)$$

$$\frac{1}{2} (2)$$

$$\frac{3}{4} (3)$$

$$1 (4)$$

دروس تخصصی (احتمال، آمار ریاضی، نمونه‌گیری و رگرسیون ۱):

۷۶ - فرض کنید  $P(X \leq a) + P(Y \leq \frac{1}{a}) = ?$  باشند.  $Y \sim F_{(n,m)}$  و  $X \sim F_{(m,n)}$ . مقدار  $a > 1$  است.

$$1 (1)$$

$$\frac{1}{2} (2)$$

$$\frac{1}{a} (3)$$

$$1 - \frac{1}{a} (4)$$

۷۷ - فرض کنید  $X_1, \dots, X_5$  یک نمونه تصادفی ۵ تایی از توزیعی با تابع احتمال زیر باشد. مقدار

$$P\left[\sum_{i=1}^5 \left[\frac{X_i}{3}\right] = 3\right]$$

$$P(X=x) = \frac{1}{3} \quad x = 1, 2, 3$$

$$\frac{80}{234} (1)$$

$$\frac{80}{792} (2)$$

$$\frac{80}{243} (3)$$

$$\frac{80}{729} (4)$$

- ۷۸- فرض کنید  $Z \sim N(0, 1)$  و  $\Phi$  و  $I$  به ترتیب نمایانگرتابع توزیع  $Z$  و تابع نشانگر باشند. مقدار  $E(e^Z I_{[Z>0]})$  کدام است؟

$$e^{-\frac{1}{2}} \Phi(-1) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} e^{\frac{1}{2}} \Phi(-1) \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \Phi(1) \quad (3)$$

$$e^{\frac{1}{2}} \Phi(1) \quad (4)$$

- ۷۹- فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی با مقادیر ممکن صحیح مثبت باشد که تابع احتمال آن در رابطه زیر صدق می‌کند. مقدار  $Var(X)$  کدام است؟

$$\forall P[X = k] = \frac{4}{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

۱۲ (۱)

 $\frac{3}{16}$  (۲) $\frac{4}{9}$  (۳)

۱۶ (۴)

- ۸۰- اگر  $F(x) = U \sim U(0, 1)$  و  $F^{-1}(U) \leq F^{-1}(1-U)$  باشد مقدار  $P[F^{-1}(U) \leq F^{-1}(1-U)]$  کدام است؟

 $\frac{1}{4}$  (۱) $\frac{1}{2}$  (۲) $\frac{3}{4}$  (۳)

۱ (۴)

- ۸۱- فرض کنید  $(X, Y)$  میانه متغیر تصادفی  $X \sim N(0, 1)$  باشد. مقدار  $Y | X = 0$  کدام است؟

۰ (۱)

 $\frac{1}{2}$  (۲)

۱ (۳)

۲ (۴)

-۸۲ اگر  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی با تابع احتمال توأم زیر باشند، مقدار  $P[X = Y]$  کدام است؟

$$P[X = i, Y = j] = \frac{1}{n(n+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (n \geq 1)$$

$$\frac{1}{n+1} \quad (1)$$

$$\frac{2}{n+2} \quad (2)$$

$$\frac{n}{n+1} \quad (3)$$

$$\frac{n+1}{n+2} \quad (4)$$

-۸۳ نقطه  $W = (W_1, W_2)$  را به صورت تصادفی از مربع واحد به رئوس مقابل  $(0,0), (1,0), (0,1)$  انتخاب می‌کنیم. قرار

دهید  $X_2 = W_2^T$ ,  $X_1 = W_1^T$ . تابع توزیع توأم  $(X_1, X_2)$  برای  $1 \leq r_1, r_2 \leq 1$  کدام است؟

$$r_1^T r_2^T \quad (1)$$

$$\sqrt{r_1} \sqrt{r_2} \quad (2)$$

$$2r_1 r_2 \quad (3)$$

$$r_1 r_2 \quad (4)$$

-۸۴ فرض کنید  $\frac{1}{\lambda}$  و  $\lambda \sim \text{Exp}(1)$  دو متغیر تصادفی مستقل باشند. مقدار  $P(Y > X)$  کدام است؟

$$\frac{1}{2}(1 + e^{-1}) \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}e^{-1} \quad (2)$$

$$\frac{1-e^{-1}}{2} \quad (3)$$

$$1 - \frac{1}{2}e^{-1} \quad (4)$$

-۸۵ فرض کنید  $(X, Y)$  دو متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال توأم زیر باشد. تابع چگالی احتمال متغیر

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{سایر نقاط} \end{cases} \quad \text{تصادفی } V = \frac{X}{Y} \text{ در نقطه } a \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{1}{a+1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{(a+1)^2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{(a+1)^3} \quad (3)$$

$$\frac{1}{(a+1)^4} \quad (4)$$

- ۸۶- اگر یک نمونه تصادفی سه تایی از توزیع یکنواخت روی  $(0,1)$  مشاهده شود، احتمال اینکه عیانه نمونه بین  $\frac{1}{4}$  و

$\frac{3}{4}$  باشد، کدام است؟

$\frac{1}{4}$  (۱)

$\frac{11}{16}$  (۲)

$\frac{3}{4}$  (۳)

$\frac{11}{32}$  (۴)

- ۸۷- فرض کنید  $X_1, X_2$  دو متغیر تصادفی مستقل با توزیع یکسان  $U(0,1)$  هستند. مقدار  $E\left(\frac{1}{\ln X_1 X_2}\right)$  کدام

است؟

$\circ$  (۱)

$1$  (۲)

$-1$  (۳)

$\infty$  (۴)

- ۸۸- فرض کنید  $X$  و  $Y$  متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع یکسان  $Exp(1)$  هستند. اگر قرار دهیم  $V = \max\{X, Y\} - \min\{X, Y\}$  در این صورت تابع مولد گشتاور  $V$  کدام است؟

$\frac{1}{1-t^r} ; |t| > 1$  (۱)

$\frac{1}{t^r-1} ; |t| < 1$  (۲)

$\frac{1}{1-t^r} ; |t| < 1$  (۳)

$\frac{1}{t^r-1} ; |t| > 1$  (۴)

- ۸۹- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(0,2)$  باشد قرار می دهیم  $S_i = n[X_i]$  و  $S = \sum_{i=1}^n S_i$

مقدار  $E(S)$  کدام است؟ ( $[X]$  جزء صحیح  $X$  است).

$n$  (۱)

$\frac{n}{2}$  (۲)

$2n$  (۳)

$\frac{n^2}{2}$  (۴)

۹۰- ظرفی حاوی ۹ گوی با شماره‌های ۱، ۲، ... و ۹ است. ابتدا یک گوی به تصادف از ظرف خارج می‌کنیم. سپس به تعداد شماره گوی، سکه‌ای سالم را پرتاب می‌کنیم. امید ریاضی تعداد شیرها کدام است؟

$$\frac{5}{2} \quad (1)$$

$$\frac{9}{4} \quad (2)$$

$$\frac{11}{2} \quad (3)$$

$$\frac{11}{4} \quad (4)$$

۹۱- فرض کنید  $X \sim U(0, 1)$  و  $Y | X = x \sim \text{Bin}(n, x)$  باشند. مقدار  $\text{Var}(Y)$  کدام است؟

$$\frac{n}{12} \quad (1)$$

$$\frac{n+1}{12} \quad (2)$$

$$\frac{n(n+1)}{6} \quad (3)$$

$$\frac{n(n+2)}{12} \quad (4)$$

۹۲- فرض کنید  $(X, Y) \sim Ge(p)$  (مدل تعداد آزمایش‌ها) دو متغیر تصادفی مستقل از هم باشند. مقدار  $E(e^{X \ln Y})$  کدام است؟

$$p - 1 \quad (1)$$

$$q - 1 \quad (2)$$

$$p + 1 \quad (3)$$

$$q + 1 \quad (4)$$

۹۳- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_N$  یک نمونه تصادفی  $N$  تابی از جامعه‌ای با تابع توزیع  $F(x)$  باشد. اگر  $N$  متغیری تصادفی مستقل از  $X$ ‌ها با توزیع هندسی با پارامتر  $p$  باشد، تابع توزیع  $X_{(N)} = \max(X_1, \dots, X_N)$  کدام است؟

$$\frac{pF(x)}{1-qF(x)} \quad (1)$$

$$\frac{pqF(x)}{1-pF(x)} \quad (2)$$

$$\frac{qF(x)}{1-pF(x)} \quad (3)$$

$$\frac{pqF(x)}{1-qF(x)} \quad (4)$$

۹۴- فرض کنید ...  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک دنباله از متغیرهای تصادفی باشند به طوریکه  $X_n \sim \chi^2_{(n)}$ , دنباله  $Y_n = \frac{X_n}{n}$  در

احتمال به سمت چه مقداری میل می کند؟

$$\frac{1}{4} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{3}{4} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

۹۵- فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای تابع بقاء  $\bar{F}(x) = \frac{1}{1+x}$ ،  $x > 0$  باشد. با تعریف اگر  $Y_n = \frac{\gamma n X}{n+2}$

$\bar{G}_Y(t) = P(Y > t)$  در این صورت تابع بقاء توزیع حدی  $Y_n$  کدام است؟

$$\bar{G}_Y(t) = \frac{1}{(1+t)^{\gamma}}, \quad t > 0 \quad (1)$$

$$\bar{G}_Y(t) = \frac{\gamma}{\gamma+t}, \quad t > 0 \quad (2)$$

$$\bar{G}_Y(t) = \frac{1}{1+\gamma t}, \quad t > 0 \quad (3)$$

$$\bar{G}_Y(t) = \frac{1}{1+t}, \quad t > 0 \quad (4)$$

۹۶- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. آماره بسنده برای  $\alpha$  کدام است؟ (تابع چگالی احتمال و  $F$  تابع توزیع معلوم هستند).

$$g_\alpha(x) = \alpha f(x) F^{\alpha-1}(x) \quad \alpha > 0, \quad x > 0$$

$$\sum_{i=1}^n \log F(X_i) \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n F(X_i) \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \log f(X_i) \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n f(X_i) \quad (4)$$

۹۷- فرض کنید  $X_{ij} \sim P(i\lambda)$  ،  $i=1, \dots, k$  ،  $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$  مستقل باشند که در آن  $\lambda$  آماره بستنده برای  $j=1, \dots, n_i$  کدام است؟

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} iX_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{1}{i} X_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

۹۸- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(\theta, \theta + 1)$  باشد. مقدار  $E\left(\frac{X_1}{X_n}\right)$  کدام است؟

$$\frac{1}{n}$$

$$\frac{n-1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1}$$

۹۹- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(\theta, \theta + 1)$  باشد. با فرض  $n=10$ ، تعداد  $X_1$  هایی که کمتر از ۲ مشاهده شده‌اند برابر ۴ مشاهده شده است. برآورد ماکسیمم درستنمایی (MLE) پارامتر  $\theta$  کدام است؟

$$4 (1)$$

$$5 (2)$$

$$6 (3)$$

$$8 (4)$$

۱۰۱- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $U(\theta, \theta + |\theta|)$  باشد. اگر  $\theta > 0$  باشد، برآوردهای ماکسیمم

درستنمایی (MLE) پارامتر  $\theta$  کدام است؟

$$X_{(1)} \quad (1)$$

$$X_{(n)} \quad (2)$$

$$\frac{X_{(n)}}{2} \quad (3)$$

$$\hat{\theta} = \begin{cases} X_{(1)} & \forall X < 0 \\ \frac{X_{(n)}}{2} & \forall X > 0 \end{cases} \quad (4)$$

۱۰۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $E(\theta, 1)$  با تابع چگالی احتمال زیر باشد. آماره  $T(X) = X_{(1)} + b$  به ازاء چه مقدار  $b$  یک برآوردهای ناریب  $\theta$  است؟

$$f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)}, x > \theta \quad \text{و} \quad X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n)$$

$$1 \quad (1)$$

$$-1 \quad (2)$$

$$-\frac{1}{n} \quad (3)$$

$$\frac{1}{n} \quad (4)$$

۱۰۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد، به ازای چه مقدار  $b$ ، برآوردهای

$$T = b \sum_{i=0}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad \text{به طور مجانبی برای } \sigma^2 \text{ ناریب است؟}$$

$$\frac{1}{n^2 - 1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n^2 - 2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{n - 2} \quad (3)$$

$$1 \quad (4)$$

۱۰۳- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(\mu, \sigma^2)$  باشد، که در آن  $\mu$  نامعلوم و  $\sigma$  معلوم است.

پارامتر  $\mu$  کدام است؟

$$\bar{X}^r \quad (1)$$

$$\bar{X}^r - \frac{\sigma^2}{n} \bar{X} \quad (2)$$

$$\bar{X}^r - \frac{\sigma^2}{n} \bar{X}^r \quad (3)$$

$$\bar{X}^r + \frac{\sigma^2}{n} \bar{X} \quad (4)$$

۱۰۴- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع  $N(0, \sigma^2)$  باشد. کدام است؟

$$\bar{X}^r \quad (1)$$

$$\bar{X}^r \quad (2)$$

$$n\bar{X}^r \quad (3)$$

$$\frac{1}{n}\bar{X}^r \quad (4)$$

۱۰۵- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع نمایی با میانگین  $\frac{1}{\theta}$  باشد، واریانس مجانی براوردگر

ماکزیمم درستنمایی پارامتر  $\theta$  کدام است؟

$$n\theta^r \quad (1)$$

$$\theta^r \quad (2)$$

$$\frac{n}{\theta^r} \quad (3)$$

$$\frac{\theta^r}{n} \quad (4)$$

۱۰۶- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال  $f_\theta(x) = \frac{\theta}{(1+x)^{\theta+1}}$  و  $\theta > 0$  باشد.

$(P(\chi_{(v,1-\alpha)}^r \leq \chi_{(v,1-\alpha)}^r) = 1-\alpha)$  با دمهای برابر برای  $\theta$  کدام است؟

$$\left( \frac{-\sum \ln x_i}{\chi_{(vn,1-\frac{\alpha}{r})}^r}, \frac{-\sum \ln x_i}{\chi_{(vn,\frac{\alpha}{r})}^r} \right) \text{ (۱)} \quad \left( \frac{\chi_{(vn,1-\frac{\alpha}{r})}^r}{-\sum \ln x_i}, \frac{\chi_{(vn,\frac{\alpha}{r})}^r}{-\sum \ln x_i} \right) \text{ (۲)}$$

$$\left( \frac{\sum \ln(1+x_i)}{\chi_{(vn,1-\frac{\alpha}{r})}^r}, \frac{\sum \ln(1+x_i)}{\chi_{(vn,\frac{\alpha}{r})}^r} \right) \text{ (۳)} \quad \left( \frac{\chi_{(vn,\frac{\alpha}{r})}^r}{\sum \ln(1+x_i)}, \frac{\chi_{(vn,1-\frac{\alpha}{r})}^r}{\sum \ln(1+x_i)} \right) \text{ (۴)}$$

۱۰۷- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  یک نمونه تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  باشد. یک بازه اطمینان  $(1-\alpha)$  درصدی مجازی برای  $\lambda$  کدام است؟

$$\bar{X} \pm \frac{1}{n} Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \text{ (۱)}$$

$$\bar{X} \pm \sqrt{\frac{s}{n}} Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \text{ (۲)}$$

$$\bar{X} \pm \frac{\bar{X}}{\sqrt{n}} Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \text{ (۳)}$$

$$\bar{X} \pm \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}} Z_{\frac{1-\alpha}{2}} \text{ (۴)}$$

۱۰۸- فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع احتمال  $f_0$  یا  $f_1$  (در جدول زیر) باشد. همچنین فرض کنید  $N_j$  تعداد  $X_i$ ‌های برابر با  $j$  باشد،  $i=1, 2, \dots, n$  و  $j=1, 2, 3$ . ناحیه بحرانی  $MP$  برای آزمون فرض

$H_0: f = f_0$  در برابر  $H_1: f = f_1$  کدام است؟

x	1	2	3
$f_0(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$f_1(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$$N_1 + N_2 > c \text{ (۱)}$$

$$N_1 + N_2 > c \text{ (۲)}$$

$$N_1 > c \text{ (۳)}$$

$$N_1 + N_3 > c \text{ (۴)}$$

- ۱۰۹- فرض کنید  $(X_1, X_2) \sim N(\mu, \mu, 1, 1, \frac{1}{\sqrt{2}})$  با تابع چگالی احتمال توان زیر باشد. پرتوانترین آزمون در سطح  $\alpha$  برای آزمون  $H_0: \mu = \mu_0$  در مقابل  $H_1: \mu = \mu_1$  کدام است؟

$$(P(Z \leq z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha \text{ و } \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \mu_0 < \mu_1)$$

$$f_T(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \exp \left\{ -(x_1 - \mu)^2 + \sqrt{2}(x_1 - \mu)(x_2 - \mu) - (x_2 - \mu)^2 \right\}$$

$$\bar{x} > \mu_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2}} z_{1-\alpha} \quad (1)$$

$$\bar{x} > \mu_0 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} z_{1-\alpha} \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 > 2\mu_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2 + \sqrt{2}} z_{1-\alpha} \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 > 2\mu_0 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} z_{1-\alpha} \quad (4)$$

- ۱۱۰- فرض کنید  $x$  یک تک مشاهده از توزیع برنولی با پارامتر  $p$  باشد. پرتوانترین آزمون در سطح  $\alpha = 0.05$  برای آزمون  $H_0: p = \frac{1}{3}$  در مقابل  $H_1: p = 1$  کدام است؟

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0/6 & x = 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0/75 & x = 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0/4 & x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0/1 & x = 0 \end{cases} \quad (4)$$

۱۱۱- فرض کنید  $X$  یک تک مشاهده از توزیعی بایکی ازتابع چگالی احتمال‌های  $-1 < x < 1$  و  $f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

آزمون به روش نسبت درستنمایی با اندازه  $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$  برای آزمون  $H_0: f = f_0$  در

مقابل  $H_1: f = f_1$  کدام است؟

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 < x < 2 \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} < x < 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & -1 < x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x < \frac{3}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \leq x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

۱۱۲- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با تابع توزیع  $G_\theta(x) = [F(x)]^\theta$ ,  $\theta > 0$ , باشد که در آن

تابع توزیع  $F(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $x \geq 0$  است. ناحیه رد پر توان ترین آزمون یکنواخت (UMP) بر انجام

آزمون فرضیه  $H_1: \theta > 1$  در مقابل  $H_0: \theta \leq 1$  به اندازه  $\alpha$  کدام است؟

$$\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{1+x_i} > \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{(vn, \alpha)}^2 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{1+x_i} > -\frac{1}{\sqrt{2}} \chi_{(vn, \alpha)}^2 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{1+x_i} > \chi_{(vn, \alpha)}^2 \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{1+x_i} > -\chi_{(vn, \alpha)}^2 \quad (4)$$

۱۱۳- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع پواسون با پارامتر  $\lambda$  باشد. ناحیه بحرانی پرتوانترین آزمون

یکنواخت برای  $H_0 : P(X_1 \leq 1) > \frac{1}{\gamma}$  در مقابل  $H_1 : P(X_1 \leq 1) \leq \frac{1}{\gamma}$  کدام است؟

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \sum x_i < c \\ \gamma & \sum x_i = c \\ 0 & \sum x_i > c \end{cases} \quad (1)$$

$$\varphi(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \bar{x} e^{\bar{x}} > c \\ \gamma & \bar{x} e^{\bar{x}} = c \\ 0 & \bar{x} e^{\bar{x}} < c \end{cases} \quad (2)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \sum I(x_i \leq 1) > c \\ \gamma & \sum I(x_i \leq 1) = c \\ 0 & \sum I(x_i \leq 1) < c \end{cases} \quad (3)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \bar{x} e^{\bar{x}} < c \\ \gamma & \bar{x} e^{\bar{x}} = c \\ 0 & \bar{x} e^{\bar{x}} > c \end{cases} \quad (4)$$

۱۱۴- فرض کنید  $x$  یک تک مشاهده از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد. ناحیه رد آزمون نسبت درستنمایی برای

$f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} (\theta - x) \quad 0 < x < \theta, \theta > 0$  در مقابل  $H_0 : \theta \neq \theta_0$  کدام است؟  $H_1 : \theta = \theta_0$

$$\{x : |x - \frac{\theta_0}{4}| > c\} \quad (1)$$

$$\{x : x > \frac{\theta_0}{4} \text{ یا } x < c\} \quad (2)$$

$$\{x : |x - \frac{\theta_0}{2}| > c\} \quad (3)$$

$$\{x : x > \frac{\theta_0}{2} \text{ یا } x < c\} \quad (4)$$

۱۱۵- یک زنجیر مارکوف دو وضعیتی با وضعیت‌های  $\{1, 0\}$  را در نظر بگیرید که با احتمال  $\frac{1}{2}$  از وضعیت ۰ آغاز می‌شود. اگر یافته  $H_1 : p \leq \frac{1}{2}$

در مقابل  $H_1 : p > \frac{1}{2}$  کدام است؟ (پ احتمال تغییر وضعیت از ۰ به ۱ یا از ۱ به ۰ است).

$$\frac{5^3}{3^7 \times 2^3} \quad (1)$$

$$\frac{5^3}{3^5 \times 2^7} \quad (2)$$

$$\frac{5^5}{2^7 \times 3^3} \quad (3)$$

$$\frac{5^2}{2^3 \times 3^3} \quad (4)$$

۱۱۶- جامعه‌ای به حجم ۱۲۰۰۰ کالا به سه طبقه به نسبت‌های به ترتیب ۳، ۲ و ۱ در طبقات اول، دوم و سوم افراز شده است. به روش طبقه‌ای با تخصیص متناسب، نمونه‌ای اولیه به حجم ۶۰۰ از این جامعه استخراج نموده‌ایم و در این نمونه، نسبت کالاهای معیوب در طبقه اول  $40/0$  و در طبقات دوم و سوم  $60/0$  مشاهده شده است. اگر بخواهیم نسبت کالاهای معیوب در جامعه را با اعتماد  $95/90$  با کران خطای  $2/0$  برآورد کنیم، باید از طبقه اول چقدر دیگر نمونه بگیریم؟ (فرض کنید  $Z_{0.975} = 2$ )

(۱) ۳۵۰ کالا

(۲) ۵۰۰ کالا

(۳) ۷۰۰ کالا

(۴) ۱۰۰۰ کالا

۱۱۷- از جامعه‌ای به حجم  $N$  دو نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری و مستقل به حجم‌های  $n_1$  و  $n_2$  انتخاب می‌کنیم.

میانگین‌های نمونه را به ترتیب با  $\bar{y}_1$  و  $\bar{y}_2$  نشان داده و تعریف می‌کنیم  $(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) / 2 = \bar{y}$ . شرط دقیق‌تر بودن

$\bar{y}_1$  از  $\bar{y}$  کدام است؟

$$\frac{3}{n_2} - \frac{1}{n_1} > \frac{2}{N} \quad (1)$$

$$\frac{3}{n_1} - \frac{1}{n_2} > \frac{2}{N} \quad (2)$$

$$\frac{3}{n_2} - \frac{1}{n_1} < \frac{2}{N} \quad (3)$$

$$\frac{3}{n_1} - \frac{1}{n_2} < \frac{2}{N} \quad (4)$$

۱۱۸- در یک نمونه تصادفی ساده ۲۵۰ تایی از ۲۰۰۰ دانشجوی یک دانشکده، ۲۰۰ نفر خانم و ۱۰۰ نفر غیربومی حضور داشته‌اند که ۱۴۰ نفر از افراد بومی، خانم بودند. اگر تعداد دانشجویان خانم در این دانشکده ۱۵۰۰ نفر باشد، برآورده ناریب از تعداد کل دانشجویان غیربومی در بین خانم‌ها و آقایان کدام است؟

- (۱) ۴۸۰ خانم و ۳۲۰ آقا
- (۲) ۴۵۰ خانم و ۴۰۰ آقا
- (۳) ۳۲۰ خانم و ۴۸۰ آقا
- (۴) ۴۰۰ خانم و ۴۵۰ آقا

۱۱۹- فرض کنید در جامعه‌ای به حجم  $N$  ضریب تغییرات متغیر  $Y$  برابر  $\frac{2}{3}$  باشد. اگر در یک نمونه تصادفی ساده بدون جایگذاری به حجم  $n$ ، ضریب تغییرات میانگین نمونه برابر  $20\%$  حاصل شده باشد، آنگاه حجم نمونه برابر با کدام گزینه است؟

$$n = \frac{N}{10} \quad (1)$$

$$n = \frac{10N}{10+N} \quad (2)$$

$$n = \frac{100N}{100+N} \quad (3)$$

$$n = \frac{N+100}{10} \quad (4)$$

۱۲۰- در نمونه‌گیری تصادفی ساده بدون جایگذاری  $n$  تایی از جامعه‌ای به حجم  $N=100$ ، اگر فرض کنیم  $\pi_{ij}$  احتمال آن باشد که واحدهای  $i$ ام و  $j$ ام جامعه به طور همزمان در نمونه قرار گیرند و  $\pi_{ij}$  احتمال آن باشد که واحد  $i$ ام جامعه در نمونه قرار گیرد، به ازای  $N, i, j = 1, \dots, N$  و  $j \neq i$  وقتی نسبت  $\frac{\pi_{ij}}{\pi_i}$  برابر  $\frac{1}{9}$  باشد، حجم نمونه کدام است؟

- (۱) ۹
- (۲) ۱۰
- (۳) ۱۱
- (۴) ۱۲

۱۲۱- در نمونه‌گیری تصادفی ساده با جایگذاری به حجم  $n$  از جامعه متناهی به حجم  $N$ ، انتظار می‌رود چند عنصر تنها یک بار در نمونه ظاهر شوند؟

$$n\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} \quad (1)$$

$$\frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \quad (2)$$

$$\frac{n}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1} \quad (3)$$

$$N\left[1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right] \quad (4)$$

۱۲۲- فرض کنید در جامعه‌ای به حجم  $N$  رابطه  $y_k$  برقرار باشد. می‌خواهیم میانگین این جامعه را بر اساس یک نمونه تصادفی ساده به حجم  $n$  برآورد کنیم. در چه صورتی واریانس برآوردگر نااریب میانگین، بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند؟

$$(1) \text{ میانگین جامعه برابر } \frac{N}{2} \text{ باشد.}$$

$$(2) \text{ میانگین جامعه برابر } \frac{1}{2} \text{ باشد.}$$

$$(3) \text{ میانگین جامعه برابر با } \frac{N+1}{2} \text{ باشد.}$$

(4) در هر حال واریانس برآوردگر میانگین جامعه کران بالا ندارد.

۱۲۳- می‌دانیم  $k$  عنصر اول جامعه‌ای به حجم  $N$  فاقد صفت خاص می‌باشد. لذا به منظور برآورد نسبت این صفت ( $P$ )، یک نمونه  $n$  تابی از  $N-k$  عنصر آخر جامعه به روش تصادفی ساده و بدون جایگذاری انتخاب می‌کنیم. اگر  $\hat{P}$  نسبت مشاهده شده در این نمونه باشد، برآوردگر نااریب  $P$  کدام است؟

$$\hat{P} \quad (1)$$

$$\frac{k}{N}\hat{P} \quad (2)$$

$$\hat{P} + \frac{k}{N} \quad (3)$$

$$\left(1 - \frac{k}{N}\right)\hat{P} \quad (4)$$

۱۲۴- در نمونه‌گیری تصادفی ساده برای برآورد میانگین صفت  $\bar{y}$  در جامعه و در مقایسه با برآوردهای معمولی  $\bar{x}$ , برآوردهای نسبتی و برآوردهای رگرسیونی وقتی صفت کمکی، صفت  $x$  بوده و عرض از مبدأ خط رگرسیون  $y$  بر  $x$  نزدیک صفر باشد، عبارت صحیح کدام است؟

(۱) برآوردهای نسبتی از رگرسیونی دقیق‌تر است.

(۲) برآوردهای نسبتی اغلب از برآوردهای معمولی دقیق‌تر است.

(۳) برآوردهای معمولی از برآوردهای نسبتی دقیق‌تر است.

(۴) برآوردهای معمولی، نسبتی و رگرسیونی معادل هستند.

۱۲۵- جامعه‌ای شامل ۱۰۰۰۰ نفر در قالب ۲۴۰۰ خانوار داریم، به طور تصادفی ساده و با جایگذاری و با احتمال متناسب با اندازه خانوار برای هر فرد، ۲۰ فرد از این جامعه انتخاب نموده و از هر فرد انتخاب شده جنس سرپرست خانوار سؤال شده است. اگر در نمونه به دست آمده فقط ۲ سرپرست زن درخانوارهای ۴ و ۵ نفر مشاهده شده باشند، برآوردهای نسبت خانوارهای دارای سرپرست زن کدام است؟

$$\frac{1}{9} \quad (1)$$

$$\frac{9}{20} \quad (2)$$

$$\frac{9}{400} \quad (3)$$

$$\frac{3}{32} \quad (4)$$

۱۲۶- در مدل رگرسیون خطی ساده  $r_{x,y} = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ ،  $i=1,\dots,n$ ،  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$  ضریب همبستگی نمونه‌ای مشاهدات  $\hat{y}_i = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n)'$  و  $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)'$  است. اگر  $y = (y_1, \dots, y_n)'$  مقدار پیش‌بینی شده  $y$  به روش کمترین توان‌های دوم باشد، ضریب همبستگی نمونه‌ای  $y$  و  $\hat{y}$  بر حسب  $r_{x,y}$  کدام است؟ (تابع  $\text{sign}(x)$  تابع علامت است)

$$\text{sign}(\hat{\beta}_1)r_{x,y} \quad (1)$$

$$\text{sign}(\hat{\beta}_0)r_{x,y} \quad (2)$$

$$r_{x,y}' \quad (3)$$

$$r_{x,y} \quad (4)$$

- ۱۲۷ در برآزش مدل رگرسیون خطی، اگر  $\hat{y}_i = \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_n$ ، مقادیر برآزش داده شده (پیش‌بینی شده) برای پاسخ واحد آزمایشی  $\lambda$  و  $e_i = y_i - \hat{y}_i$  باشند. مقدار  $\text{cov}(y_i, \hat{y}_i)$  کدام است؟

(۱) صفر

(۲)  $\text{Var}(\hat{y}_i)$ (۳)  $\text{Var}(y_i)$ (۴)  $\text{Var}(e_i)$ 

- ۱۲۸ فرض کنید  $Y_1, \dots, Y_n$  در رابطه زیر صدق کنند،

$$Y_i = \theta e^{x_i^\top} (1 + x_i^\top) + \varepsilon_i, \quad i=1, \dots, n$$

که در آن  $x_1, \dots, x_n$  ثابت و  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \sim N(0, \sigma^2)$  هستند. برآورد MLE (ماکسیمم درستنمایی)  $\theta$  کدام است؟

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n Y_i e^{x_i^\top} (1 + x_i^\top) / \sum_{i=1}^n [e^{x_i^\top} (1 + x_i^\top)] \quad (۱)$$

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n Y_i e^{x_i^\top} / \sum_{i=1}^n [e^{x_i^\top} (1 + x_i^\top)] \quad (۲)$$

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n Y_i e^{x_i^\top} (1 + x_i^\top) / \sum_{i=1}^n [e^{x_i^\top} (1 + x_i^\top)] \quad (۳)$$

$$\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n Y_i e^{x_i^\top} (1 + x_i^\top) / \sum_{i=1}^n [e^{x_i^\top} (1 + x_i^\top)] \quad (۴)$$

- ۱۲۹ در یک مدل رگرسیون خطی ساده  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ ،  $i=1, 2, \dots, n$  و  $\varepsilon_i$  واریانس مجموع مربعات رگرسیونی یعنی  $\text{Var}(\text{SSR})$  کدام است؟

(۱)  $\sigma^2$ (۲)  $2\sigma^2$ (۳)  $H_0: \beta_1 = 0$  تحت فرض  $\sigma^2$ (۴)  $H_0: \beta_1 = 0$  تحت فرض  $\sigma^2$ 

- ۱۳۰ در یک نمونه تصادفی ۱۸ تایی از زوج مرتب‌های  $(x_i, y_i)$  مقدار ضریب همبستگی  $r$  برابر  $6/6$  شده است. اگر  $\beta_1$  ضریب رگرسیون خطی  $y$  روی  $x$  باشد، مقدار آماره F جدول آنالیز واریانس رگرسیون خطی ساده کدام است؟

(۱) ۸/۱

(۲) ۹

(۳) ۱۰

(۴) ۱۱/۲

۱۳۱ - در مدل رگرسیون خطی ساده فرض کنید  $(\bar{y} = \bar{x} + a)$  مقادیر پیش‌بینی به ترتیب در نقاط  $\bar{x}$  و  $a$  برای هر عدد طبیعی  $a$  باشد به طوری که  $\bar{x} + a$  در محدوده تغییرات مشاهدات باشد. برای  $n$  مشاهده با واریانس

$$\text{خطای}^2 \sigma^2, \text{مقدار } S_{xx} = \sum (x_i - \bar{x})^2 \text{ بر حسب کدام است؟}$$

$$1 + \frac{na^2}{S_{xx}} \quad (1)$$

$$1 - \frac{a^2}{nS_{xx}} \quad (2)$$

$$1 - \frac{na^2}{S_{xx}} \quad (3)$$

$$1 + \frac{a^2}{nS_{xx}} \quad (4)$$

۱۳۲ - در مدل رگرسیونی  $y = X\beta + \varepsilon$  با  $E(\varepsilon) = 0$ ، ماتریس  $X$  شامل  $r$  متغیر مستقل است. حال فرض کنید که مدل واقعی شامل  $s$  متغیر مستقل دیگر باشد که در ماتریس  $Z$  هستند؛ یعنی مدل واقعی به شکل  $y = X\beta + Z\theta + \varepsilon$  است. اگر برآورد  $\hat{\beta}$  در مدل واقعی،  $\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$  اختیار شود، مقدار اربیتی  $b$  برای  $\hat{\beta}$  کدام است؟

$$(X'X)^{-1}X'Z\theta \quad (1)$$

$$(X'X)^{-1}X'y\hat{\beta} \quad (2)$$

(3) صفر

$$(X'X)^{-1}X'y \quad (4)$$

۱۳۳ - دو متغیر تبیینی  $x_1$  و  $x_2$  به ترتیب وارد مدل رگرسیونی  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$  می‌شوند. ضریب تعیین مدل در مرحله اول  $3/0$  و در مرحله دوم برابر  $6/0$  است. اگر ماتریس  $X$  با ابعاد  $n \times 3$  دارای خاصیت  $X'X = 3I$  باشد، گزینه صحیح کدام است؟

$$S_{x_1 x_1} > S_{x_2 x_2}, \hat{\beta}_1 > \hat{\beta}_2 \quad (1)$$

$$S_{x_1 x_1} < S_{x_2 x_2}, \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 \quad (2)$$

$$S_{x_1 x_1} < S_{x_2 x_2}, \hat{\beta}_1 > \hat{\beta}_2 \quad (3)$$

$$S_{x_1 x_1} > S_{x_2 x_2}, \hat{\beta}_1 = \hat{\beta}_2 \quad (4)$$

۱۳۴- در مدل رگرسیون خطی چندگانه  $y = X\beta + \varepsilon$  با مشاهدات مستقل و هم واریانس، اگر  $h_{ij}$  نشان دهنده مؤلفه سطر آم و ستون آم ماتریس  $H = X(X'X)^{-1}X'$  باشد، مقدار واریانس باقیمانده آم ( $e_i = y_i - \hat{y}_i$ ) کدام است؟

$$\sigma^2 h_{ii} \quad (1)$$

$$\sigma^2(1-h_{ii}) \quad (2)$$

$$\sigma^2 h_{ii}^2 \quad (3)$$

$$\sigma^2(1-h_{ii})^2 \quad (4)$$

۱۳۵- مدل رگرسیونی اول به صورت  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$  و مدل رگرسیونی دوم به صورت  $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon^*$  است که بر اساس نمونه‌ای به حجم ۱۰، مجموع مربعات خطای مدل اول و دوم به ترتیب برابر ۱۵۰ و ۲۰۰ و مجموع مربعات رگرسیون مدل اول و دوم به ترتیب ۱۹۰ و ۱۴۰ است. مقدار آماره آزمون برای آزمون  $H_0: \beta_2 = 0$  در مدل رگرسیونی اول، کدام است؟

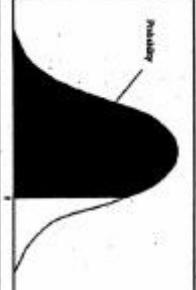
$$2 \quad (1)$$

$$\frac{5}{3} \quad (2)$$

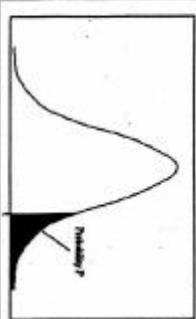
$$3 \quad (3)$$

$$\frac{8}{3} \quad (4)$$

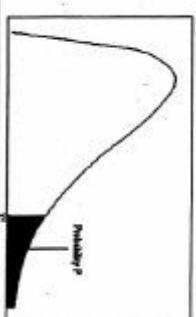
سطوح زیر منحنی فرمول استاندارد



مقادیر بحرانی توزیع ۱



مقادیر بحرانی توزیع مرتع کای



df	.10	.05	.025	.01	.005
1	48.5	0.0001	0.0009	0.0039	3.8814
2	0.010	0.0201	0.025	0.0365	5.0238
3	2.1886	2.920	4.303	5.925	6.6349
4	3.3533	3.182	4.541	5.841	7.8777
5	4.1533	2.132	3.776	5.118	9.2110
6	4.7476	2.015	3.271	4.604	10.96
7	5.1441	1.947	3.026	4.2871	12.338
8	5.4411	1.887	2.917	4.0844	13.144
9	5.6888	1.829	2.817	4.0844	13.484
10	5.844	1.779	2.728	4.0844	13.726
11	5.9403	1.734	2.674	4.0844	14.060
12	6.0117	1.693	2.626	4.0844	14.400
13	6.0517	1.656	2.577	4.0844	14.732
14	6.065	1.626	2.528	4.0844	15.066
15	6.0596	1.596	2.479	4.0844	15.399
16	6.036	1.566	2.429	4.0844	15.732
17	6.0039	1.536	2.379	4.0844	16.065
18	5.9612	1.506	2.329	4.0844	16.398
19	5.910	1.476	2.279	4.0844	16.731
20	5.8506	1.446	2.229	4.0844	17.064
21	5.782	1.416	2.179	4.0844	17.397
22	5.7063	1.386	2.129	4.0844	17.730
23	5.6202	1.356	2.079	4.0844	18.063
24	5.5260	1.326	2.029	4.0844	18.396
25	5.4236	1.296	1.979	4.0844	18.729
26	5.3136	1.266	1.929	4.0844	19.062
27	5.2036	1.236	1.879	4.0844	19.395
28	5.0834	1.206	1.829	4.0844	19.728
29	4.9633	1.176	1.779	4.0844	20.061
30	4.8333	1.146	1.729	4.0844	20.394
31	4.7033	1.116	1.679	4.0844	20.727
32	4.5733	1.086	1.629	4.0844	21.060
33	4.4433	1.056	1.579	4.0844	21.393
34	4.3133	1.026	1.529	4.0844	21.726
35	4.1833	0.996	1.479	4.0844	22.059
36	4.0533	0.966	1.429	4.0844	22.392
37	3.9233	0.936	1.379	4.0844	22.725
38	3.7933	0.906	1.329	4.0844	23.058
39	3.6633	0.876	1.279	4.0844	23.391
40	3.5333	0.846	1.229	4.0844	23.724
41	3.4033	0.816	1.179	4.0844	24.057
42	3.2733	0.786	1.129	4.0844	24.390
43	3.1433	0.756	1.079	4.0844	24.723
44	3.0133	0.726	1.029	4.0844	25.056
45	2.8833	0.696	0.979	4.0844	25.389
46	2.7533	0.666	0.929	4.0844	25.722
47	2.6233	0.636	0.879	4.0844	26.055
48	2.4933	0.606	0.829	4.0844	26.388
49	2.3633	0.576	0.779	4.0844	26.721
50	2.2333	0.546	0.729	4.0844	27.054
51	2.1033	0.516	0.679	4.0844	27.387
52	1.9733	0.486	0.629	4.0844	27.720
53	1.8433	0.456	0.579	4.0844	28.053
54	1.7133	0.426	0.529	4.0844	28.386
55	1.5833	0.396	0.479	4.0844	28.719
56	1.4533	0.366	0.429	4.0844	29.052
57	1.3233	0.336	0.379	4.0844	29.385
58	1.1933	0.306	0.329	4.0844	29.718
59	1.0633	0.276	0.279	4.0844	30.051
60	0.9333	0.246	0.229	4.0844	30.384
61	0.8033	0.216	0.179	4.0844	30.717
62	0.6733	0.186	0.129	4.0844	31.050
63	0.5433	0.156	0.079	4.0844	31.383
64	0.4133	0.126	0.029	4.0844	31.716
65	0.2833	0.096	-0.039	4.0844	32.049
66	0.1533	0.066	-0.089	4.0844	32.382
67	0.0233	0.036	-0.139	4.0844	32.715
68	-0.1033	-0.006	-0.189	4.0844	33.048
69	-0.2333	-0.036	-0.239	4.0844	33.381
70	-0.3633	-0.066	-0.289	4.0844	33.714
71	-0.4933	-0.096	-0.339	4.0844	34.047
72	-0.6233	-0.126	-0.389	4.0844	34.380
73	-0.7533	-0.156	-0.439	4.0844	34.713
74	-0.8833	-0.186	-0.489	4.0844	35.046
75	-1.0133	-0.216	-0.539	4.0844	35.379
76	-1.1433	-0.246	-0.589	4.0844	35.712
77	-1.2733	-0.276	-0.639	4.0844	36.045
78	-1.4033	-0.306	-0.689	4.0844	36.378
79	-1.5333	-0.336	-0.739	4.0844	36.711
80	-1.6633	-0.366	-0.789	4.0844	37.044
81	-1.7933	-0.396	-0.839	4.0844	37.377
82	-1.9233	-0.426	-0.889	4.0844	37.710
83	-2.0533	-0.456	-0.939	4.0844	38.043
84	-2.1833	-0.486	-0.989	4.0844	38.376
85	-2.3133	-0.516	-1.039	4.0844	38.709
86	-2.4433	-0.546	-1.089	4.0844	39.042
87	-2.5733	-0.576	-1.139	4.0844	39.375
88	-2.7033	-0.606	-1.189	4.0844	39.708
89	-2.8333	-0.636	-1.239	4.0844	40.041
90	-2.9633	-0.666	-1.289	4.0844	40.374
91	-3.0933	-0.696	-1.339	4.0844	40.707
92	-3.2233	-0.726	-1.389	4.0844	41.040
93	-3.3533	-0.756	-1.439	4.0844	41.373
94	-3.4833	-0.786	-1.489	4.0844	41.706
95	-3.6133	-0.816	-1.539	4.0844	42.039
96	-3.7433	-0.846	-1.589	4.0844	42.372
97	-3.8733	-0.876	-1.639	4.0844	42.705
98	-4.0033	-0.906	-1.689	4.0844	43.038
99	-4.1333	-0.936	-1.739	4.0844	43.371
100	-4.2633	-0.966	-1.789	4.0844	43.704
101	-4.3933	-0.996	-1.839	4.0844	44.037
102	-4.5233	-0.106	-1.889	4.0844	44.370
103	-4.6533	-0.136	-1.939	4.0844	44.703
104	-4.7833	-0.166	-1.989	4.0844	45.036
105	-4.9133	-0.196	-2.039	4.0844	45.369
106	-5.0433	-0.226	-2.089	4.0844	45.702
107	-5.1733	-0.256	-2.139	4.0844	46.035
108	-5.3033	-0.286	-2.189	4.0844	46.368
109	-5.4333	-0.316	-2.239	4.0844	46.701
110	-5.5633	-0.346	-2.289	4.0844	47.034
111	-5.6933	-0.376	-2.339	4.0844	47.367
112	-5.8233	-0.406	-2.389	4.0844	47.700
113	-5.9533	-0.436	-2.439	4.0844	48.033
114	-6.0833	-0.466	-2.489	4.0844	48.366
115	-6.2133	-0.496	-2.539	4.0844	48.700
116	-6.3433	-0.526	-2.589	4.0844	49.033
117	-6.4733	-0.556	-2.639	4.0844	49.366
118	-6.6033	-0.586	-2.689	4.0844	49.700
119	-6.7333	-0.616	-2.739	4.0844	50.033
120	-6.8633	-0.646	-2.789	4.0844	50.366
121	-7.0033	-0.676	-2.839	4.0844	50.700
122	-7.1333	-0.706	-2.889	4.0844	51.033
123	-7.2633	-0.736	-2.939	4.0844	51.366
124	-7.3933	-0.766	-2.989	4.0844	51.700
125	-7.5233	-0.796	-3.039	4.0844	52.033
126	-7.6533	-0.826	-3.089	4.0844	52.366
127	-7.7833	-0.856	-3.139	4.0844	52.700
128	-7.9133	-0.886	-3.189	4.0844	53.033
129	-8.0433	-0.916	-3.239	4.0844	53.366
130	-8.1733	-0.946	-3.289	4.0844	53.700
131	-8.3033	-0.976	-3.339	4.0844	54.033
132	-8.4333	-1.006	-3.389	4.0844	54.366
133	-8.5633	-1.036	-3.439	4.0844	54.700
134	-8.6933	-1.066	-3.489	4.0844	55.033
135	-8.8233	-1.096	-3.539	4.0844	55.366
136	-8.9533	-1.126	-3.589	4.0844	55.700
137	-9.0833	-1.156	-3.639	4.0844	56.033
138	-9.2133	-1.186	-3.689	4.0844	56.366
139	-9.3433	-1.216	-3.739	4.0844	56.700
140	-9.4733	-1.246	-3.789	4.0844	57.033
141	-9.6033	-1.276	-3.839	4.0844	57.366
142	-9.7333	-1.306	-3.889	4.0844	57.700
143	-9.8633	-1.336	-3.939	4.0844	58.033
144	-10.0033	-1.366	-3.989	4.0844	58.366
145	-10.1333	-1.396	-4.039	4.0844	58.700
146	-10.2633	-1.426	-4.089	4.0844	59.033
147	-10.3933	-1.456	-4.139	4.0844	59.366
148	-10.5233	-1.486	-4.189	4.0844	59.700
149	-10.6533	-1.516	-4.239	4.0844	60.033
150	-10.7833	-1.546	-4.289	4.0844	60.366
151	-10.9133	-1.576	-4.339	4.0844	60.700
152	-11.0433	-1.606	-4.389	4.0844	61.033
153	-11.1733	-1.636	-4.439	4.0844	61.366
154	-11.3033	-1.666	-4.489	4.0844	61.700
155	-11.4333	-1.696	-4.539	4.0844	62.033
156	-11.5633	-1.726	-4.589	4.0844	62.366
157	-11.6933	-1.756	-4.639	4.0844	62.700
158	-11.8233	-1.786	-4.689	4.0844	63.033
159	-11.9533	-1.816	-4.739	4.0844	63.366
160	-12.0833	-1.846	-4.789	4.0844	63.700
161	-12.2133	-1.876	-4.839	4.0844	64.033
162	-12.3433	-1.906	-4.889	4.0844	64.366
163	-12.4733	-1.936	-4.939	4.0844	64.700
164	-12.6033	-1.966	-4.989	4.0844	65.033
165	-12.7333	-1.996	-5.039</		

## کلید اولیه ازمن کارشناسی ارشد نایپوسته سال 1396

کلید اولیه ازمن کارشناسی ارشد نایپوسته سال 1396

به اطلاع داوطلبان شرکت کننده در آزمون کارشناسی ارشد سال 1396 می رساند، این کلید اولیه غیر قابل استناد است و بس از دریافت نظرات داوطلبان و صاحب نظران، کلید نهایی سوالات تهیه و بر اساس آن کارنامه داوطلبان استخراج خواهد شد، در صورت تمایل حداکثر تا تاریخ 18/02/1396 با مراجухه به سیستم باسخگویی اینترنتی به نشانی request.sanjesh.org و تکمیل فرم اعتراض به کلید سوالات آزمون کارشناسی ارشد سال 1396 افادم نمایید.

لازم به ذکر است نظرات داوطلبان فقط از طریق اینترنت دریافت خواهد شد و به موارد ارسالی از طریق دیگر رسیدگی نخواهد شد.

نوع دفترچه	نام رشته امتحانی	کد رشته امتحانی
A	amar	1207

شماره سوال	گزینه صحیح								
1	2	31	4	61	1	91	4	121	1
2	4	32	2	62	3	92	4	122	2
3	1	33	3	63	3	93	1	123	4
4	3	34	4	64	3	94	4	124	2
5	4	35	1	65	4	95	2	125	3
6	1	36	3	66	1	96	1	126	1
7	3	37	1	67	2	97	2	127	2
8	2	38	4	68	4	98	1	128	4
9	2	39	2	69	3	99	2	129	3
10	1	40	1	70	2	100	1	130	2
11	1	41	4	71	3	101	3	131	1
12	2	42	3	72	1	102	3	132	1
13	4	43	1	73	2	103	2	133	3
14	3	44	2	74	4	104	4	134	4
15	1	45	2	75	3	105	4	135	2
16	2	46	1	76	1	106	3		
17	3	47	2	77	3	107	4		
18	4	48	4	78	4	108	4		
19	3	49	4	79	1	109	1		
20	1	50	3	80	1	110	4		
21	1	51	1	81	3	111	2		
22	2	52	2	82	1	112	2		
23	3	53	4	83	2	113	1		
24	2	54	1	84	1	114	3		
25	1	55	3	85	2	115	3		
26	3	56	1	86	2	116	3		
27	1	57	4	87	3	117	2		
28	4	58	2	88	3	118	1		
29	2	59	2	89	4	119	3		
30	2	60	3	90	1	120	4		

خروج