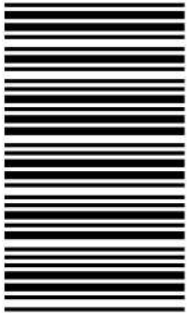


کد کنترل

470

A



470A

## آزمون ورودی دوره دکتری (نیمه متمرکز) - سال ۱۴۰۰

دفترچه شماره (۱)

صبح جمعه

۹۹/۱۲/۱۵



«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور

### رشته ریاضی - (کد ۲۲۳۳)

\* تذکر مهم: دقت لازم در پاسخ به مواد امتحانی، رشته و زمینه‌های مورد نظر به عمل آید.

مدت پاسخ‌گویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۷۵

#### عنوان مواد امتحانی

دروس کارشناسی ارشد			دروس کارشناسی							زمینه	گرایش	رشته	
اصول آموزش ریاضی	بهبودسازی خطی ۱	جبر پیشرفته ۱	آنالیز حقیقی ۱	مبانی احتمال	توپولوژی	مبانی جبر	مبانی آنالیز عددی	مبانی آنالیز ریاضی	مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی				مبانی علوم ریاضی
-	-	✓	✓	-	✓	✓	-	✓	✓	✓	محض	-	ریاضی
-	✓	-	✓	✓	-	-	✓	✓	✓	✓	کاربردی	-	ریاضی
✓	-	-	✓	✓	-	-	✓	✓	✓	✓	-	-	آموزش ریاضی*

- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه محض می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی جبر، توپولوژی، آنالیز حقیقی ۱ و جبر پیشرفته ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه کاربردی می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و بهبودسازی خطی ۱) پاسخ دهند.
- متقاضیان رشته ریاضی، زمینه آموزش ریاضی می‌بایستی به دروس (مبانی علوم ریاضی، مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی، مبانی آنالیز ریاضی، مبانی آنالیز عددی، مبانی احتمال، آنالیز حقیقی ۱ و اصول آموزش ریاضی) پاسخ دهند.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

\* داوطلب گرامی، عدم درج مشخصات و امضا در مندرجات جدول ذیل، به منزله عدم حضور شما در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤالات، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤالات و پائین پاسخنامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

مبانی علوم ریاضی (محض، کاربردی و آموزش ریاضی):

۱- نقیض گزاره زیر کدام است؟

مجموعه A عضوی دارد که با هیچ عضو مجموعه B برابر نیست.

$$(1) \forall x(x \in A \Rightarrow \forall y(y \in B \Rightarrow x = y))$$

$$(2) \forall x(x \in A \wedge \exists y(y \in B \wedge x = y))$$

$$(3) \forall x(x \in A \Rightarrow \exists y(y \in B \wedge x = y))$$

$$(4) \forall x(x \in A \Rightarrow \exists y(y \in B \Rightarrow x = y))$$

۲- کدام فرمول منطقی راستگو است؟ (p و q و r حروف گزاره‌ای سازای فرمول هستند و  $\equiv$  نماد معادل بودن است).

$$(1) p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

$$(2) (q \Rightarrow r) \vee [(p \wedge q) \Rightarrow r]$$

$$(3) p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$$

$$(4) (\sim q \vee r) \vee [(p \wedge q) \Rightarrow r]$$

۳- رابطه هم‌ارزی R روی  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  را به این صورت تعریف می‌کنیم که  $(m, n)R(m', n') \Leftrightarrow m - n' = m' - n$

کدام گزینه درباره کلاس‌های هم‌ارزی در R صحیح است؟

(۱) تعداد شمارا کلاس هم‌ارزی نامتناهی شمارا دارد.

(۲) تعداد متناهی کلاس هم‌ارزی نامتناهی و تعداد شمارا کلاس هم‌ارزی متناهی دارد.

(۳) تعداد شمارا کلاس هم‌ارزی متناهی دارد.

(۴) تعداد شمارا کلاس هم‌ارزی نامتناهی و تعداد شمارا کلاس هم‌ارزی متناهی دارد.

۴- فرض کنید  $f: X \rightarrow X$  و E زیرمجموعه نامتناهی و شمارایی از X باشد. در این صورت کدام گزینه همواره صحیح است؟

(۱) هر دو مجموعه  $f(f^{-1}(E))$  و  $f^{-1}(f(E))$  حداکثر شماراست.

(۲) هر دو مجموعه  $f(f^{-1}(E))$  و  $f^{-1}(f(E))$  نامتناهی است.

(۳)  $f(f^{-1}(E))$  نامتناهی و  $f^{-1}(f(E))$  حداکثر شماراست.

(۴)  $f(f^{-1}(E))$  حداکثر شمارا و  $f^{-1}(f(E))$  نامتناهی است.

- ۵- کدام یک از گزینه‌ها درست است؟ ( $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  اعداد اصلی (Cardinal) هستند.)
- (۱) سه عدد اصلی ترامتناهی (transfinite) مانند  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  وجود دارند که  $\alpha < \beta$  ولی  $\alpha^\gamma = \beta^\gamma$ .
  - (۲) اگر  $\alpha < \beta$  آنگاه  $\gamma^\alpha < \gamma^\beta$ .
  - (۳) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  ترامتناهی (transfinite) باشند و  $\alpha < \beta$  آنگاه  $\alpha\gamma < \beta\gamma$ .
  - (۴) اگر  $\alpha$  و  $\beta$  ترامتناهی (transfinite) باشند آنگاه  $\alpha + \beta < \alpha\beta$ .

مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی (محض، کاربردی و آموزش ریاضی):

- ۶- فرض کنید  $V$  فضای برداری چند جمله‌های حداکثر از درجه ۹ با ضرایب حقیقی روی میدان اعداد حقیقی و  $T: V \rightarrow V$  یک تبدیل خطی با ضابطه  $T(p(x)) = xp'(x) + p(x)$  باشد. کدام گزینه نادرست است؟
- (۱)  $\det(T) = 9!$
  - (۲)  $\text{tr}(T) = 55$
  - (۳)  $T$  پوشا است.
  - (۴)  $T$  مقادیر ویژه متمایز دارد.

- ۷- فرض کنیم  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  روی میدان اعداد حقیقی باشد به طوری که  $\det(A) = 1$ . اگر  $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$  یکی

از مقادیر ویژه ماتریس  $A$  باشد و  $A^{100} = aA^2 + bA + cI_3$ ، آنگاه:

$$(1) \quad a = 1, b = 1, c = -1$$

$$(2) \quad a = 0, b = 0, c = 1$$

$$(3) \quad a = 1, b = 0, c = -1$$

$$(4) \quad a = 0, b = 1, c = 0$$

- ۸- فرض کنید  $A$  و  $B$  ماتریس‌هایی مربعی با درایه‌ها در مجموعه اعداد حقیقی باشند، به طوری که  $B$  وارون پذیر است. در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر در مورد مجموعه  $X = \{A + xB \mid x \in \mathbb{R}\}$  صحیح است؟
- (۱) همه اعضای  $X$  وارون پذیرند.
  - (۲) همه اعضای  $X$  وارون ناپذیرند.
  - (۳) تنها تعداد متناهی از عناصر  $X$  وارون پذیرند.
  - (۴) تنها تعداد متناهی از عناصر  $X$  وارون پذیر نیستند.

- ۹- فرض کنید  $A \in M_3(\mathbb{R})$  به طوری که  $\det(I_3 + A) = 1$ ,  $\text{tr}(A) = -2$  و  $2I_3 + A$  معکوس پذیر نیست. در این صورت  $\det(A)$  کدام است؟

$$(1) \quad -4$$

$$(2) \quad -2$$

$$(3) \quad 2$$

$$(4) \quad 4$$

۱۰- فرض کنید  $V$  زیر فضایی از فضای ماتریس‌های مربعی  $n \times n$  با درایه‌ها در اعداد مختلط باشد به طوری که هر عنصر غیر صفر آن وارون ضربی داشته باشد. در این صورت کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) بعد  $V$  روی اعداد مختلط حداقل  $\frac{n(n-1)}{2}$  است.

(۲) بعد  $V$  روی اعداد مختلط حداکثر  $n$  است.

(۳) بعد  $V$  روی اعداد مختلط برابر  $\frac{n(n-1)}{2}$  است.

(۴) بعد  $V$  روی اعداد مختلط حداقل  $n$  است.

مبانی آنالیز ریاضی (محض، کاربردی و آموزش ریاضی):

۱۱- اگر  $A = \left\{ \frac{3m+2n}{5m+7n} : m, n \geq 3 \right\}$ ، آن گاه مقدار اینفیمم  $A$  کدام است؟

(۱) ۰

(۲)  $\frac{2}{7}$

(۳)  $\frac{3}{5}$

(۴)  $\frac{5}{12}$

۱۲- چند جمله‌ای  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 5$ ، چند ریشه حقیقی دارد؟

(۱) فقط دو ریشه متمایز

(۲) فقط یک ریشه

(۳) ریشه حقیقی ندارد.

(۴) چهار ریشه

۱۳- فرض کنیم  $\{x_n\}$  دنباله‌ای در  $(0,1) \cap \mathbb{Q}$  باشد که  $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = 1$  و  $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$  و به ازای

هر  $n \in \mathbb{N}$ ،  $|x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{n}$ ، مجموعه حدود زیر دنباله‌ای  $\{x_n\}$  کدام است؟

(۱)  $(0,1)$

(۲)  $\{0,1\}$

(۳)  $[0,1]$

(۴)  $(0,1) \cap \mathbb{Q}$

۱۴- فرض کنید  $a < x_0 < b$ ، تابع  $f : (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$  پیوسته و بر بازه‌های  $(x_0, b)$  و  $(a, x_0)$  مشتق پذیر باشد. اگر

$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = A$ ، آن گاه کدام گزینه درست است؟

(۱) مشتق  $f$  در  $x_0$  لزوماً موجود نیست.

(۲) مشتق  $f$  در  $x_0$  موجود و برابر  $A$  است.

(۳) اگر  $f'$  بر بازه‌های  $(x_0, b)$  و  $(a, x_0)$  یکنوا باشد، آن گاه مشتق  $f$  در  $x_0$  موجود و برابر با  $A$  است و شرط

یکنوایی  $f'$  هم ضروری است.

(۴) مشتق  $f$  در  $x_0$  موجود است و اگر تابع  $f'$  پیوسته باشد، آن گاه  $f'(x_0) = A$  و شرط پیوستگی  $f'$  ضروری است.

۱۵- شعاع همگرایی سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^{n+2} \left(\frac{x-3}{2}\right)^{n(n+1)}$ ، برابر با کدام است؟

(۱) ۲

(۲)  $\frac{1}{2}$ (۳)  $\infty$ 

(۴) ۰

مبانی آنالیز عددی (کاربردی و آموزش ریاضی):

۱۶- محاسبه  $T = \sqrt{x + \frac{1}{\sqrt{x}}} - \sqrt{x - \frac{1}{\sqrt{x}}}$  به ازای مقادیر مثبت و بزرگ  $x$ ، به طوری که  $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$  مدنظر

است.  $f(x)$  مقدار محاسبه شده عبارت). عبارت مناسب برای محاسبه  $T$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{x}$ (۲)  $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ (۳)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (۴)  $\frac{2}{x\sqrt{x}}$ 

۱۷- روش نیوتن برای کمینه سازی  $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y + 1$  با شروع از ..... تکرار همگراست.

(۱) تنها برخی نقاط شروع به جواب موضعی  $f$  پس از یک(۲) هر نقطه شروع به جواب یکتای سراسری  $f$  در یک

(۳) هر نقطه شروع به جواب یکتای سراسری پس از دو

(۴) تنها برخی نقاط شروع به جواب سراسری  $f$  پس از تعدادی متناهی

۱۸- فرض کنید تجزیه متعامد  $QR$  به صورت  $A=QR$  در دست است، به طوری که  $Q$  یک ماتریس متعامد نرمال و  $R$

یک ماتریس بالا مثلثی با سطرهای مستقل خطی است. مسأله  $\min_x \|Ax - b\|_p$  ..... به دست آورد.

(۱) یک جواب یکتا دارد و آن را می توان با حل دو دستگاه بالا مثلثی

(۲) یک جواب یکتا دارد و آن را می توان با حل دو دستگاه پایین مثلثی

(۳) یک جواب یکتا دارد و آن را می توان با حل یک دستگاه بالا مثلثی

(۴) بی نهایت جواب دارد و دست کم یکی از آن ها را می توان با حل یک دستگاه بالا مثلثی

۱۹- فرض کنید  $g(x)$  یک چند جمله‌ای از درجه  $p$  است. فرض کنید  $x_1 \leq \dots \leq x_{p+2}$ . در این صورت،

$$g[x_1, \dots, x_{p+2}] \text{ برابر است با } \dots$$

(۱) صفر

$$(۲) \frac{1}{(p+1)!}$$

(۳) ۱

$$(۴) \text{ صفر اگر تنها اگر } x_1 = x_{p+2}$$

۲۰- حل دستگاه  $Ax = b$  با  $A$  وارون پذیر را در نظر بگیرید. فرض کنید درایه‌های ماتریس  $A$  خطایی نسبی تقریباً

برابر با  $10^{-t}$  دارند. این دستگاه را با روشی پایدار روی ماشینی با روند عددی یک برابر با  $10^{-p}$  حل می‌کنیم. اگر

عدد حالت ماتریس  $A$  برابر با  $10^q$ ،  $q > 1$  باشد، آنگاه انتظار می‌رود که تعداد ارقام قابل اعتماد در  $\bar{x}$ ، جواب

محاسبه شده برای دستگاه، تقریباً برابر باشد با .....

$$(۱) p - q$$

$$(۲) \max(p - q, t - q)$$

$$(۳) t - q$$

$$(۴) \min(p - q, t - q)$$

مبانی جبر (محض):

۲۱- فرض کنید  $G$  یک گروه باشد و  $x$  و  $y$  عناصری از  $G$  باشند. کدام یک از گزاره‌های زیر شرطی لازم و کافی برای

$$\text{همریختی بودن تابع } \begin{cases} f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow G \\ (n, m) \mapsto x^n y^m \end{cases} \text{ است؟}$$

$$(۱) xy = yx$$

(۲)  $x$  یا  $y$  عضو خنثی  $G$  باشد.

(۳)  $x$  و  $y$  در مرکز گروه  $G$  قرار داشته باشند.

(۴)  $x$  و  $y$  هر دو عضو خنثی  $G$  باشند.

۲۲- فرض کنید  $R$  یک حلقه باشد و  $a, b \in R$ . کدام گزینه صحیح است؟

(۱) اگر  $a$  و  $b$  پوچتوان باشد، آن‌گاه  $ab$  نیز پوچتوان است.

(۲) اگر  $ab$  پوچتوان باشد، آن‌گاه  $a$  یا  $b$  پوچتوان است.

(۳) اگر  $a+b$  پوچتوان باشد، آن‌گاه  $a$  یا  $b$  پوچتوان است.

(۴) اگر  $ab$  پوچتوان باشد، آن‌گاه  $ba$  نیز پوچتوان است.

۲۳- فرض کنید  $G$  یک گروه متناهی و  $\emptyset \neq S \subseteq G$

تعریف می‌کنیم  $H = \{x \in G : xS = S\}$  کدام گزینه نادرست است؟

$$(۱) \text{ اگر } S \leq G \text{ آن‌گاه } H = S$$

$$(۲) |H| = |S|$$

$$(۳) \text{ اگر } H = S \text{ آن‌گاه } S \leq G$$

$$(۴) H \leq G$$

۲۴- فرض کنید  $G$  یک گروه منتهای و  $C^*$  گروه ضربی اعداد مختلط غیر صفر باشد. برای همریختی  $f: G \rightarrow C^*$  تعریف می‌کنیم:  $a = \prod_{x \in G} f(x)$ . کدام گزینه صحیح است؟

(۱)  $a \in \{-1, i\}$

(۲)  $a \in \{1, i\}$

(۳)  $a \in \{-1, 1\}$

(۴)  $a \in \{-1, \mp i\}$

۲۵- حلقه  $\mathbb{Z}_n$  را در نظر بگیرید که در آن  $n \geq 3$  عدد طبیعی فردی است. اگر  $a$  تعداد اعضای خودتوان و  $b$  تعداد اعضای وارون پذیر  $\mathbb{Z}_n$  باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱)  $a$  توانی از ۲ است و  $a \nmid b$

(۲)  $a$  توانی از ۲ است و  $a \mid b$

(۳)  $a$  توانی از ۲ نیست و  $a \nmid b$

(۴)  $a$  توانی از ۲ است و لزومی ندارد که  $a \mid b$

توپولوژی (محض):

۲۶- فرض کنید  $f: X \rightarrow Y$  که  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک هستند. در این صورت  $f$  بر  $X$  پیوسته است، اگر و تنها اگر .....  
(۱)  $f$  بر هر زیرمجموعه فشرده  $X$  پیوسته باشد.

(۲)  $f$  هر زیرمجموعه باز  $X$  را به زیرمجموعه‌ای باز از  $Y$  بنگارد.

(۳)  $f^{-1}(Y)$  در  $X$  باز باشد.

(۴)  $f$  هر زیرمجموعه فشرده  $X$  را به زیرمجموعه‌ای فشرده از  $Y$  بنگارد.

۲۷- مجموعه  $\mathbb{R}$  را همراه با توپولوژی  $\{\mathbb{R} \setminus A\} \cup \{\emptyset\}$  متناهی است:  $\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} : \dots\}$  در نظر بگیرید. کدام گزینه در مورد فضای توپولوژیک  $(\mathbb{R}, \tau)$  نادرست است؟

(۱) همبند است.

(۲) فشرده است.

(۳) هاسدورف است.

(۴) اگر  $E \subseteq \mathbb{R}$  و  $\mathbb{R} \setminus E$  شمارا باشد، آنگاه  $E$  یک مجموعه  $G_\delta$  است.

۲۸- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو فضای توپولوژیک و  $f: X \rightarrow Y$  تابعی پیوسته و پوشا باشد. کدام یک از ویژگی‌های زیر از  $X$  به  $Y$  منتقل می‌شود؟

(۱) متریک پذیری

(۲) منظم بودن

(۳) نرمال بودن

(۴) تفکیک پذیری

۲۹- فرض کنید  $(X, \tau)$  یک فضای توپولوژیک و  $\{x_n\}$  یک دنباله از اعضای متمایز  $X$  باشد. اگر  $y \in X$  تنها نقطه حدی مجموعه  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  باشد، آنگاه کدام شرط همگرایی  $x_n \rightarrow y$  را نتیجه می‌دهد؟

(۱)  $X$  فشرده باشد.

(۲)  $X$  کامل (Perfect) باشد.

(۳)  $(X, \tau)$  متریک پذیر و کران دار باشد.

(۴) حتی اگر  $(X, \tau)$  متریک پذیر و فشرده و کامل (Perfect) باشد، ممکن است  $\{x_n\}$  واگرا باشد.

- ۳۰- فرض کنید  $(X_1, \tau_1)$  و  $(X_2, \tau_2)$  فضاهای توپولوژیک باشند و  $X = X_1 \times X_2$ . اگر بر  $X$  توپولوژی حاصل ضربی را در نظر بگیریم و برای  $i = 1, 2$ ،  $\pi_i: X \rightarrow X_i$  نگاشت تصویر باشد، آنگاه کدام گزینه نادرست است؟
- (۱) برای  $i = 1, 2$ ، نگاشت‌های  $\pi_i$  پیوسته و باز هستند.
- (۲) خانواده  $\{\pi_i^{-1}(U_i) : U_i \in \tau_i, i = 1, 2\}$  یک پایه برای توپولوژی حاصل ضربی است.
- (۳)  $X$  همبند مسیری است، اگر و تنها اگر  $X_1$  و  $X_2$  همبند مسیری باشند.
- (۴) برای فضای توپولوژیک  $Y$ ، تابع  $f: Y \rightarrow X$  پیوسته است اگر و تنها اگر نگاشت‌های  $\pi_i \circ f$  پیوسته باشند. ( $i = 1, 2$ )

مبانی احتمال (کاربردی و آموزش ریاضی):

- ۳۱- به چند طریق می‌توان ۵ حرف A و ۶ حرف B را در یک ردیف قرارداد که از راست و چپ یکسان خوانده شوند؟

$$\frac{5!}{3!} \quad (۱)$$

$$\frac{5!}{3!2!} \quad (۲)$$

$$\frac{10!}{5!5!} \quad (۳)$$

$$\frac{11!}{25!6!} \quad (۴)$$

- ۳۲- کیسه‌ای شامل ۴ مهره قرمز و ۶ مهره آبی است. کیسه دیگری شامل ۱۶ مهره قرمز و تعدادی مجهول مهره آبی است. یک مهره به تصادف از هر کیسه انتخاب می‌شود، احتمال اینکه دو مهره انتخابی هم رنگ باشند  $0/44$  است. تعداد مهره‌های آبی کیسه دوم کدام است؟

$$4 \quad (۱)$$

$$6 \quad (۲)$$

$$12 \quad (۳)$$

$$20 \quad (۴)$$

- ۳۳- ۹۰ بلیط بخت آزمایی توسط ۹ نفری هر کدام ۱۰ بلیط خریداری می‌شود که شامل ۵ بلیط برنده است. احتمال اینکه هر ۵ بلیط برنده را یک نفر دریافت کند، کدام است؟

$$\frac{7 \times 8 \times 9}{87 \times 88 \times 89} \quad (۱)$$

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10}{86 \times 87 \times 88 \times 89 \times 90} \quad (۲)$$

$$\frac{6 \times 7 \times 9 \times 10}{86 \times 88 \times 89 \times 90} \quad (۳)$$

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{86 \times 87 \times 88 \times 89} \quad (۴)$$



۳۴- فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$ ،  $(n \geq 2)$  یک نمونه تصادفی از توزیعی پیوسته با تابع توزیع  $F$  باشد، احتمال اینکه دومین آماره ترتیبی کوچکتر یا مساوی میانه توزیع باشد، چقدر است؟

$$(1) \quad 1 - \frac{n}{2^n}$$

$$(2) \quad 1 - \frac{n+1}{2^n}$$

$$(3) \quad 1 - \frac{n-1}{2^{n-1}}$$

$$(4) \quad 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$$

۳۵- فرض کنید  $X$  و  $Y$  دو متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال

$$P(X=x, Y=y) = \begin{cases} c(x+y) & x, y \in \{1, 2, \dots, n\} \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

$P(X < Y)$  مطلوبست باشند،

$$(1) \quad \frac{1}{n}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2n}$$

$$(3) \quad \frac{n-1}{2n}$$

$$(4) \quad \frac{n-1}{n}$$

آنالیز حقیقی ۱ (محض، کاربردی و آموزش ریاضی):

۳۶- فرض کنید  $\mu_1$  و  $\mu_2$  دو تابع روی  $P(\mathbb{R})$  باشند، به طوری که:

$$\mu_2(E) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } E \text{ حداکثر شمارا باشد} \\ 1 & \text{اگر } E \text{ ناشمارا باشد} \end{cases} \quad \text{و} \quad \mu_1(E) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } E \text{ متنهایی باشد} \\ 1 & \text{اگر } E \text{ نامتنهایی باشد} \end{cases}$$

کدام گزینه درباره  $\mu_1$  و  $\mu_2$  درست است؟

(۱)  $\mu_1$  و  $\mu_2$  هر دو اندازه خارجی اند ولی گردایه مجموعه‌های اندازه پذیر آن‌ها متفاوت است.

(۲)  $\mu_1$  و  $\mu_2$  هر دو اندازه خارجی اند و گردایه مجموعه‌های اندازه پذیر آن‌ها یکسان است.

(۳) تنها  $\mu_2$  اندازه خارجی است و هر زیر مجموعه  $\mathbb{R}$  نسبت به آن اندازه پذیر است.

(۴) تنها  $\mu_2$  اندازه خارجی است و گردایه مجموعه‌های اندازه پذیر آن  $\{E \text{ یا } E^c \text{ حداکثر شماراست: } E \subseteq \mathbb{R}\}$  است.

۳۷- فرض کنید  $\mu$  اندازه بول مثبت ناصفر روی فضای هاسدورف  $X$  باشد، به طوری که برای هر دو مجموعه بسته  $F_1$  و  $F_2$  در  $X$

$$\mu(F_1 \cap F_2) = \mu(F_1)\mu(F_2).$$

کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \mu(X) = 1$$

(۲)  $\mu$  اندازه هر زیرمجموعه شمارای  $X$  صفر است.

$$(3) \mu(U_1 \cap U_2) = \mu(U_1)\mu(U_2), U_1, U_2 \text{ برای هر دو مجموعه باز}$$

(۴) برای هر دو نقطه متمایز  $x, y \in X$  و همسایگی‌های مجزای  $U_x$  و  $U_y$  وجود دارند که  $\mu(U_x) + \mu(U_y) = 1$ .

۳۸- برای تابع صعودی و از راست پیوسته  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ،  $\mu_F^*$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_F^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (F(b_i) - F(a_i)) : a_i, b_i \in \mathbb{R}, E \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i] \right\}$$

$\sigma$ -جبر متشکل از مجموعه‌های  $\mu_F^*$  اندازه‌پذیر را با  $M_F$  نشان می‌دهیم. کدام گزینه نادرست است؟

(۱)  $M_F$  شامل  $\sigma$ -جبر بول است.

(۲) اگر تابع  $F$  در  $\mathbb{R}$  پیوسته باشد، آنگاه  $\mu_F^*({a}) = 0$ .

(۳)  $M_F$  زیرمجموعه سرهای از  $P(\mathbb{R})$  است.

(۴) اگر  $F(x) = 2x$  آنگاه  $M_F$  همان  $\sigma$ -جبر لبگ است.

۳۹- فرض کنید  $(X, M, \mu)$  یک فضای اندازه با  $\mu(X) = 1$  و  $\{A_n\}$  دنباله‌ای از اعضای متمایز  $M$  باشد، به طوری که  $\limsup \mu(A_n) = 1$ . در این صورت زیر دنباله  $\{A_{n_k}\}$  از  $\{A_n\}$  وجود دارد به طوری که:

$$(1) \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}\right) \geq \frac{1}{2}$$

$$(2) \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k} = \emptyset$$

$$(3) \mu(A_{n_k}) = 1 \text{ برای هر } k.$$

$$(4) \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_k}^c = \emptyset$$

۴۰- فرض کنید  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 2]$  تابعی لبگ اندازه‌پذیر و  $m$  اندازه لبگ روی  $[0, 1]$  باشد. در این صورت، کدام گزینه نادرست است؟

$$(1) \int_0^1 f \, dm = 1 \text{ آنگاه } f = 1 \text{ تقریباً همه جا}$$

$$(2) \int_0^1 f \, dm = 2 \text{ آنگاه } f = 2 \text{ تقریباً همه جا}$$

$$(3) \int_0^a f \, dm = 0 \text{ آنگاه } f = 0 \text{ تقریباً همه جا}$$

$$(4) \int_0^a 4f \, dm = \int_0^a f^2 \, dm \text{ آنگاه } f = 0 \text{ تقریباً همه جا}$$

۴۱- تابع  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ \sin x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

کدام گزینه درست است؟

(۱)  $f$  انتگرال پذیر ریمان نیست ولی انتگرال پذیر لبگ است.

(۲) انتگرال پذیر لبگ نیست ولی انتگرال پذیر ریمان است.

(۳) هم انتگرال پذیر ریمان است و هم انتگرال پذیر لبگ است.

(۴) نه انتگرال پذیر ریمان است و نه انتگرال پذیر لبگ است.

۴۲- فرض کنید  $X$  فضای نرم‌دار مختلط و  $f: X \rightarrow \mathbb{C}$  تابع خطی ناصفر باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱)  $\{f(x) : \|x\| \leq 1\}$  فشرده است.

(۲)  $f$  پوشا است و هر مجموعه باز را به باز می‌نگارد.

(۳)  $f$  پوشا و  $\ker f$  زیر فضای بسته  $X$  است.

(۴)  $f$  هر مجموعه باز را به باز می‌نگارد و  $\{f(x) : \|x\| < 1\} \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ .

۴۳- فرض کنید  $(X, \mu)$  یک فضای اندازه و  $\{f_n\}$  دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بر  $X$  باشد و تابع  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  نیز

اندازه‌پذیر باشد به طوری که  $\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n - f| d\mu < \infty$ . کدام گزینه درست است؟

(۱)  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  تقریباً همه‌جا همگراست.

(۲)  $\{f_n\}$  به طور یکنواخت به  $f$  همگراست.

(۳)  $f_n \rightarrow f$  تقریباً همه‌جا ولی لزوماً  $\{f_n\}$  به طور یکنواخت به  $f$  همگرا نیست.

(۴) زیر دنباله  $\{f_{n_k}\}$  وجود دارد که  $f_{n_k} \rightarrow f$  تقریباً همه‌جا ولی  $f_n \rightarrow f$  تقریباً همه‌جا لزوماً برقرار نیست.

۴۴- فرض کنیم  $(X, \mu)$  یک فضای اندازه  $\sigma$ -متناهی باشد،  $1 < p < \infty$  و  $q$  مزدوج نمایی  $p$  باشد.  $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$

درباره مجموعه  $A = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} \mid fg \in L_1(\mu), g \in L_q(\mu)\}$  و به ازای هر  $f \in A$  اندازه‌پذیر است و به ازای هر  $f \in A$  کدام گزینه

درست است؟

(۱)  $A = L_p(\mu)$

(۲)  $L_p(\mu) \subseteq A$  ولی تساوی لزوماً برقرار نیست.

(۳)  $A \subseteq L_p(\mu)$  ولی تساوی لزوماً برقرار نیست.

(۴) هیچ‌کدام

۴۵- فرض کنید  $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  یک پایه متعامدیکه برای فضای هیلبرت  $H$  باشد. برای هر  $n \in \mathbb{N}$ ، قرار می‌دهیم.

$$y_n = e_1 + \dots + e_n + e_{n+1}$$

$$z_n = e_1 + \dots + e_n - e_{n+1}$$

کدام گزینه در مورد مجموعه‌های  $A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{z_n : n \in \mathbb{N}\}$  درست است؟

(۱)  $A^\perp = \{0\}$  و  $B^\perp = \{0\}$

(۲)  $A^\perp \neq \{0\}$  و  $B^\perp \neq \{0\}$

(۳)  $A^\perp \neq \{0\}$  و  $B^\perp = \{0\}$

(۴)  $A^\perp = \{0\}$  و  $B^\perp \neq \{0\}$

## جبر پیشرفته ۱ (محض):

- ۴۶- فرض کنیم  $M$  یک  $\mathbb{Z}$ -مدول باشد. کدام گزینه صحیح است؟  
 (۱) اگر  $M$  یکدست باشد، آنگاه هر تصویر همریخت آن نیز یکدست است.  
 (۲) اگر  $M$  آزاد باشد، آنگاه هر تصویر همریخت آن نیز آزاد است.  
 (۳) اگر  $M$  تصویری باشد، آنگاه هر تصویر همریخت آن نیز تصویری است.  
 (۴) اگر  $M$  تزریقی باشد، آنگاه هر تصویر همریخت آن نیز تزریقی است.
- ۴۷- فرض کنیم  $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$  و  $N = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}_p$  در این صورت در مورد  $\mathbb{Z}$  مدول‌های  $M$  و  $N$  کدام گزاره صحیح است؟  
 (۱)  $N$  نیم‌ساده است اما  $M$  نیست.  
 (۲) هر دو نیم‌ساده هستند.  
 (۳)  $M$  نیم‌ساده است اما  $N$  نیست.  
 (۴) هیچ‌کدام نیم‌ساده نیستند.
- ۴۸- اگر رادیکال جیکوبسن حلقه ماتریسی  $M_n(\mathbb{Z}_m)$  برابر صفر باشد، آنگاه:  
 (۱)  $n = 1$  و  $m$  توانی از عددی اول است.  
 (۲)  $n = 1$  و به ازای هر عدد اول  $p$ ،  $p^2 \nmid m$ .  
 (۳)  $n$  دلخواه و  $m$  توانی از عددی اول است.  
 (۴)  $n$  دلخواه است و به ازای هر عدد اول  $p$ ،  $p^2 \nmid m$ .
- ۴۹-  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}, \mathbb{Q} \times \mathbb{Z})$  با کدام یک از  $\mathbb{Z}$ -مدول‌های زیر یکرخت است؟ ( $\mathbb{Q}$  میدان اعداد گویا و  $\mathbb{Z}$  اعداد صحیح است.)  
 (۱)  $\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}$   
 (۲)  $\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}$   
 (۳)  $(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}$   
 (۴)  $(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}) \times \mathbb{Z}$
- ۵۰- فرض کنیم  $R$  یک حلقه و  $\circ \rightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \rightarrow \circ$  دنباله دقیق کوتاهی از  $R$ -مدول‌ها و  $R$ -همریختی‌ها باشد. در همه موارد، این دنباله شکافته می‌شود، به جز:  
 (۱)  $M$  نیم‌ساده باشد.  
 (۲)  $R$  یک میدان باشد.  
 (۳)  $M \cong N \oplus K$   
 (۴)  $K \cong \bigoplus_{i \in A} R$  که در آن  $A$  یک مجموعه اندیس‌گذار ناتهی است.
- ۵۱- اگر  $M$  یک  $\mathbb{Z}_p[x]$ -مدول آزاد با تولید متناهی باشد، کدام گزاره در مورد  $M$  صحیح نیست؟  
 (۱)  $M$ ، نوتری است.  
 (۲)  $M$ ، آرتینی است.  
 (۳) هر زیر مدول  $M$ ، آزاد است.  
 (۴) هر دو پایه  $M$  تعداد مساوی عضو دارند.

۵۲- فرض کنیم  $R$  حلقه‌ای یکدار باشد به طوری که به ازای هر  $a \in R$ ، اعداد طبیعی متمایزی مانند  $n$  و  $m$  موجودند به طوری که  $a^n = a^m$ . اگر  $J(R)$  رادیکال جیکوبسن  $R$  و  $Nil(R)$  مجموعه متشکل از تمام اعضای پوچ توان  $R$  باشند، کدام گزاره همواره صحیح است؟

(۱)  $Nil(R) \subseteq J(R)$

(۲)  $Nil(R) = J(R)$

(۳)  $J(R) \subseteq Nil(R)$

(۴)  $Nil(R) \neq J(R)$

۵۳-  $\mathbb{Z}$  -مدول  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[x]$  با کدام گزینه یکرخت است؟

(۱)  $\mathbb{Z}$

(۲)  $\mathbb{Z}[x]$

(۳)  $\mathbb{Z}[x]$

(۴)  $\circ$

۵۴- فرض کنیم  $R$  حوزه صحیح باشد به طوری که اشتراک تمام ایده‌آل‌های ماکسیمال آن ناصفر است. اگر  $M$  یک  $R$ -مدول با تولید متناهی ناصفر باشد، آنگاه:

(۱)  $M$  تزریقی نیست. (۲)  $M$  تصویری نیست ولی تزریقی است.

(۳)  $M$  تزریقی و تصویری نیست. (۴)  $M$  هم تزریقی است و هم تصویری

۵۵- فرض کنیم  $R$  حلقه‌ای جابه‌جایی و یکدار باشد و  $I$  و  $J$  دو ایده‌آل سره  $R$  باشند. اگر  $R$ -مدول‌های  $M_1$  و  $M_2$  موجود باشند که  $I, J \leq \text{Ann}(M_1) \cap \text{Ann}(M_2)$ ، آنگاه کدام گزینه در مورد کاردینال  $M_1 \otimes_{\mathbb{Z}} M_2$  و کاردینال

$$\text{Hom}_{\frac{R}{I+J}}\left(\frac{R}{I+J}, M_1\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\frac{R}{I+J}}\left(\frac{R}{I+J}, M_2\right)$$
 درست است؟

(۱) اولی بیشتر اکید از دومی است. (۲) دومی بیشتر اکید از اولی است.

(۳) برابرند. (۴) در حالت کلی نمی‌توان حکمی نتیجه گرفت.

بهبهینه‌سازی خطی ۱ (کاربردی):

۵۶- اگر به ازای هر  $x$  به طوری که  $Ax \leq 0$  داشته باشیم  $c^T x \leq 0$ ، آنگاه دستگاه  $A^T v = c$  با  $v \geq 0$ .....

(۱) جواب دارد. (۲) جواب دارد تنها اگر  $c \geq 0$ .

(۳) جواب ندارد. (۴) جواب ندارد وقتی  $A$  ناتکین باشد.

۵۷- فرض کنید مسئله  $(P)$  به صورت زیر جواب بهینه برابر با  $T^*$  دارد. اگر یکی از قیدهای آمده در  $Ax = b$  را حذف کنیم و مسئله جدید را  $(P')$  بنامیم، آنگاه  $(P')$ .....

$$\text{Min } T = c^T x$$

$$\text{s.t. } Ax = b \quad (P)$$

$$x \geq 0$$

(۱) می‌تواند ناشدنی باشد. (۲) می‌تواند بی‌کران باشد.

(۳) جواب بهینه با مقدار بهینه نایبتر از  $T^*$  دارد. (۴) جواب بهینه با مقدار بهینه ناکمتر از  $T^*$  دارد.

۵۸- مسئله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید که در آن،  $b \geq 0$ . دوگان (P) را (D) بنامید. گزینه صحیح کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Min } t &= b^T v \\ \text{s.t. } \quad A^T v &\geq c \quad (P) \\ v &\geq 0 \end{aligned}$$

(۱) (D) می تواند ناشدنی باشد.

(۲) (D) همواره جواب بهینه دارد.

(۳) (P) و (D) هر دو جواب بهینه دارند.

(۴) (P) یا ناشدنی است یا جواب بهینه دارد.

۵۹- مسئله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید و دوگان آن را (D) بنامید. اگر داشته باشیم  $u \geq 0$ ، آن گاه .....

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } \quad Ax &= 0 \quad (P) \\ 0 &\leq x \leq u \end{aligned}$$

(۱) (D) می تواند بی کران باشد.

(۲) (P) و (D) هر دو جواب بهینه دارند.

(۳) (D) شدنی است ولی (P) می تواند ناشدنی باشد.

(۴) (P) شدنی است ولی (D) می تواند ناشدنی باشد.

۶۰- فرض کنید  $x^*$  باری مسئله (P) به صورت زیر، یک بهینه کننده است. قید جدید  $d^T x \geq 0$  با بردار داده شده  $d \geq 0$  را به مسئله (P) اضافه کنید و مسئله جدید را (P') بنامید. گزینه صحیح کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } \quad Ax &= b \quad (P) \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

(۱) (P') می تواند ناشدنی باشد.

(۲)  $x^*$  جواب بهینه (P') نیز هست.

(۳)  $x'$  می تواند بهینه کننده (P') موجود باشد به طوری که  $c^T x' > c^T x^*$ .

(۴)  $x'$  می تواند بهینه کننده (P') موجود باشد به طوری که  $c^T x' < c^T x^*$ .

۶۱- مسئله برنامه ریزی خطی (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید. دوگان مسئله (P) را (D) بنامید. گزینه صحیح کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Min } T &= \sum_{i=1}^m (x_i + y_i) \\ \text{s.t. } \quad x + y &= b \quad (P) \\ x &\geq 0 \\ y &\leq 0 \end{aligned}$$

(۱) (D) می تواند ناشدنی باشد.

(۲) (D) می تواند بی کران باشد.

(۳) (P) همواره بی نهایت جواب بهینه دارد.

(۴) (P) و (D) جواب های بهینه یکتا دارند.

۶۲- مسئله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید. گزینه صحیح در مورد (P) کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{Min } & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.t. } & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (P) \\ & \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1, \quad j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

(۱) همواره جواب بهینه دارد.

(۲) می تواند شدنی یا ناشدنی باشد.

(۳) شدنی است ولی می تواند بی کران باشد.

(۴) ممکن است جواب بهینه داشته باشد یا بی کران باشد.

۶۳- مسئله اولیه (P) را به صورت زیر با  $b \geq 0$ ، در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= c^T x \\ \text{s.t. } & Ax = b \quad (P) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

مسئله مرحله یک (یا فاز یک) مربوط به (P) را برای تعیین شدنی بودن (P) به صورت زیر بنویسید:

$$\begin{aligned} \text{Min } w &= \sum_{i=1}^m y_i \\ \text{s.t. } & Ax + y = b \quad (M) \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

اگر در یک روش سیمپلکس اولیه برای حل مسئله (M)، یک متغیر  $y$  در یک جدول سیمپلکس نامزد خروج از پایه باشد، آن گاه .....

(۱) مسئله (M) و در نتیجه (P) شدنی است.

(۲) مسئله (M) و (P) هر دو می توانند ناشدنی باشند.

(۳) ممکن است تعیین جواب برای (P) با مشکل مواجه شود.

(۴)  $y_i$  و ستون مربوط به آن را می توان از جدول حذف کرد بدون آن که تعیین جواب برای مسئله (P) تغییر کند.

۶۴- مسئله‌های اولیه (P) و دوگان آن (D) را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \quad \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \quad (\text{P}) \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Max } y &= \mathbf{u}^T \mathbf{b} \\ \text{s.t. } \quad \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \Delta &= \mathbf{c} \quad (\text{D}) \\ \Delta &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

مجموعه‌های  $F$  و  $F^+$  را به صورت زیر تعریف کنید:

$$F = \{(x, y, \Delta) \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \Delta = \mathbf{c}, x \geq \mathbf{0}, \Delta \geq \mathbf{0}\},$$

$$F^+ = \{(x, y, \Delta) \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{A}^T \mathbf{u} + \Delta = \mathbf{c}, x > \mathbf{0}, \Delta > \mathbf{0}\}.$$

گزینه صحیح کدام است؟

(۱)  $x$  و  $(u, \Delta)$  به ترتیب برای (P) و (D) بهینه هستند اگر و تنها اگر  $(x, u, \Delta) \in F \setminus F^+$ .

(۲) اگر  $x$  برای (P) شدنی و  $\Delta \geq \mathbf{0}$  موجود باشد به طوری که  $x^T \Delta = \mathbf{0}$ ، آنگاه  $x$  برای (P) بهینه نیست.

(۳) اگر  $x$  و  $(u, \Delta)$  به ترتیب نقاط بهینه برای (P) و (D) باشند، آنگاه  $(x, u, \Delta) \in F \setminus F^+$ .

(۴)  $(x, u, \Delta) \in F^+$  وجود دارد به طوری که  $x$  برای (P) و  $(u, \Delta)$  برای (D) بهینه باشند.

۶۵- مسئله (P') متناظر با مسئله (P) را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \quad \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \quad (\text{P}) \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Min } V(M) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} + M \sum_{i=1}^m (x_a)_i \\ \text{s.t. } \quad \mathbf{Ax} + \mathbf{x}_a &= \mathbf{b} \quad (\text{P}') \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_a &\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

اگر به ازای هر  $M > \mathbf{0}$ ، مسئله (P') بی کران باشد، آنگاه مسئله (P).....

(۱) ناشدنی است. (۲) می تواند جواب بهینه داشته باشد.

(۳) یا بی کران است یا ناشدنی. (۴) شدنی است اگر  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  جواب داشته باشد.

اصول آموزش ریاضی (آموزش ریاضی):

۶۶- برگزاری آزمون‌های کتبی، در سنت‌های آموزشی کدام کشور، ریشه دارد؟

(۱) ژاپن (۲) چین (۳) ایران (۴) انگلستان

۶۷- از نظر ریچارد اسکمپ، از مؤسسان حوزه روان‌شناسی آموزش ریاضی، «درک رابطه‌ای» چیست؟

(۱) مدل‌سازی ریاضی

(۲) درک قواعد، قضیه‌ها و کاربرد فوری آن‌ها

(۳) به‌کارگیری رویه‌های ریاضی برای حل مسئله

(۴) درگیر شدن شخصی یادگیرنده با اشیاء، موقعیت‌ها، مسئله‌ها و ایده‌های ریاضی



- ۶۸- معنای «بازنمایی» ریاضی چیست؟  
 (۱) ابزار توسعه تفکر ریاضی  
 (۲) دست‌سازه ریاضی  
 (۳) فرایند و محصول یادگیری ریاضی  
 (۴) ملموس کردن و قابل مشاهده نمودن مفاهیم ریاضی
- ۶۹- مورد استفاده «بازنمایی» در فرایند یاددهی - یادگیری ریاضی چیست؟  
 (۱) پیوند بین مفاهیم ریاضی  
 (۲) حل مسئله در دنیای واقعی  
 (۳) یادگیری مفاهیم ریاضی  
 (۴) درک ساختار مشترک بین پدیده‌های ریاضی در زمینه‌های مختلف
- ۷۰- روایت پژوهی - اقدام پژوهی - درس پژوهی، جزو چه نوع پژوهش‌های آموزش ریاضی محسوب می‌شوند؟  
 (۱) پژوهش‌های مبتنی بر کلاس درس  
 (۲) پژوهش‌های تجربی  
 (۳) پژوهش‌های نظری  
 (۴) پژوهش‌های پیمایشی
- ۷۱- سه جنبش معاصر آموزش ریاضی کدام‌اند؟  
 (۱) هسته مشترک برنامه درسی، آموزش مبتنی بر استانداردها، تلفیق ریاضی و فناوری  
 (۲) حل مسئله، ریاضیات قومی، یادگیری سلسله‌مراتبی  
 (۳) سودمندی اجتماعی، یادگیری در حد تسلط، حل مسئله  
 (۴) آموزش مبتنی بر استانداردها، یادگیری در حد تسلط، ریاضیات قومی
- ۷۲- دو سازمان اصلی آموزش ریاضی در سطح جهانی کدام‌اند؟  
 (۱) اتحادیه بین‌المللی ریاضی (IMU)، سازمان آموزشی - علمی - فرهنگی ملل متحد (UNESCO)  
 (۲) کنگره بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها (ICM)، گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME)  
 (۳) کنگره بین‌المللی آموزش ریاضی (ICME)، کنگره بین‌المللی ریاضی‌دان‌ها (ICM)  
 (۴) گروه بین‌المللی روان‌شناسی آموزش ریاضی (PME)، کمیسیون بین‌المللی تدریس ریاضی (ICMI)
- ۷۳- «یادگیری یک فرایند فعال است که در آن، یادگیرندگان مفاهیم و ایده‌های خود را بر اساس دانش فعلی و دانش قبلی خود و مبتنی بر ساختارهای شناختی شامل طرحواره‌ها و مدل‌های ذهنی، می‌سازند. یادگیرنده و یاددهنده، به طور فعال، در این فرایند مشارکت می‌کنند». این نظریه متعلق به کدام نظریه پرداز آموزشی است؟  
 (۱) لیو ویگوتسکی (۲) آلن شونفیلد (۳) جروم برونر (۴) ژان پیاژه
- ۷۴- سه تحول اصلی که باعث تأسیس رشته آموزش ریاضی در جهان شد، کدام‌اند؟  
 (۱) روان‌شناسی، سیاسی، تاریخی  
 (۲) روان‌شناسی، برنامه‌های درسی ریاضی، سیاسی  
 (۳) سیاسی، روان‌شناسی، تاریخی  
 (۴) تاریخی، برنامه‌های درسی ریاضی، سیاسی
- ۷۵- سه مسئولیت سنتی پژوهشگران آموزش ریاضی، کدام بوده است؟  
 (۱) ارزشیابی، تدریس ریاضی، تولید برنامه‌های درسی  
 (۲) تدریس ریاضی، تهیه کتاب‌های درسی مناسب، تعامل با ریاضی‌دانان  
 (۳) تولید برنامه‌های درسی، آموزش معلمان، تهیه کتاب‌های درسی مناسب  
 (۴) تولید برنامه‌های درسی، ارزشیابی، تعامل با ریاضی‌دانان







## مشاهده کلید اولیه سوالات آزمون دکتری 1400

## کلید اولیه آزمون دکتری سال 1400

به اطلاع می‌رساند، کلید اولیه سوالات که در این سایت قرار گرفته است، غیر قابل استناد است و پس از دریافت نظرات داوطلبان و صاحب نظرات کلید نهایی سوالات تهیه و بر اساس آن کارنامه داوطلبان استخراج خواهد شد. در صورت تمایل می‌توانید حداکثر تا تاریخ 1400/01/03 با مراجعه به سامانه پاسخگویی اینترنتی (request.sanjesh.org) نسبت به تکمیل فرم "اعتراض به کلید سوالات" / "آزمون دکتری سال 1400" اقدام نمایید. لازم به ذکر است نظرات داوطلبان فقط تا تاریخ مذکور و از طریق فرم ذکر شده دریافت خواهد شد و به موارد ارسالی از طریق دیگر (نامه مکتوب یا فرم عمومی در سامانه پاسخگویی و ...) یا پس از تاریخ اعلام شده رسیدگی نخواهد شد.

عنوان دفترچه	نوع دفترچه	شماره پاسخنامه	گروه امتحانی
ریاضی	A	1	علوم پایه

شماره سوال	گزینه صحیح	شماره سوال	گزینه صحیح	شماره سوال	گزینه صحیح
1	3	31	2	61	3
2	1	32	1	62	1
3	3	33	4	63	4
4	4	34	2	64	3
5	1	35	3	65	3
6	1	36	4	66	2
7	4	37	2	67	4
8	3	38	3	68	3
9	4	39	1	69	4
10	2	40	1	70	1
11	2	41	1	71	1
12	1	42	2	72	4
13	3	43	3	73	3
14	2	44	1	74	2
15	1	45	3	75	3
16	1	46	4		
17	2	47	2		
18	3	48	4		
19	1	49	1		
20	4	50	3		
21	1	51	2		
22	4	52	3		
23	2	53	2		
24	3	54	1		
25	2	55	3		
26	1	56	1		
27	3	57	2		
28	4	58	4		
29	1	59	2		
30	2	60	2		

خروج