

315

D



نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:

صبح جمعه

۹۳/۱۲/۱۵

دفترچه شماره ۱ از ۲



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می شود.

امام خمینی (ره)

آزمون ورودی
دوره های دکتری (نیمه متمرکز) داخل - سال ۱۳۹۴

ریاضی محض
(کد ۲۲۳۳)

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - جبر خطی - جبر ۱ - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی ۱)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفند ماه - سال ۱۳۹۳

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.

۱- در مورد سری $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ کدام گزینه درست است؟

- (۱) سری همگرای مطلق است.
- (۲) سری همگرای مشروط است.
- (۳) مجموع جزئی سری کران دار است ولی واگراست.
- (۴) مجموع جزئی سری بی کران است.

۲- به ازای $a > 0$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{n+1} + \frac{a^{\frac{2}{n+1}}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{a^{\frac{n}{n+1}}}{n+\frac{1}{n}} \right)$ برابر است با:

- (۱) $\frac{1}{\ln a}$
- (۲) $\frac{a-1}{\ln a}$
- (۳) $\frac{a}{\ln a}$
- (۴) $\frac{a+1}{\ln a}$

۳- فرض کنید $X \subseteq \mathbb{R}^n$ فشرده و $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد که برای هر $t \in \mathbb{R}$ ، مجموعه $f^{-1}(t, \infty)$ بسته است. کدام گزینه درست است؟

- (۱) $x_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x) < \infty$.
- (۲) ممکن است تابع f سوپرمم و اینفیمم خود را بر X نگیرد.
- (۳) $y_0 \in X$ وجود دارد به طوری که $f(y_0) = \inf_{x \in X} f(x) > -\infty$.
- (۴) f کران دار است.

۴- اگر $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $x = a$ مشتق پذیر باشند و $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ تعریف شده باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $f(a) = g(a)$ آنگاه h در a مشتق پذیر است.

(۲) اگر h در a مشتق پذیر باشد آنگاه $f(a) \neq g(a)$

(۳) اگر $f(a) \neq g(a)$ آنگاه h در a مشتق پذیر است.

(۴) اگر h در a مشتق پذیر باشد آنگاه $g'(a) = f'(a)$

۵- فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ پیوسته و انتگرال ریمان ناسره $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ همگرا باشد. مقدار

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n x f(x) dx$$

(۱) صفر

(۲) $+\infty$

(۳) ۱

(۴) موجود نیست.

۶- فرض کنید (X, d) یک فضای متریک و $f: X \rightarrow X$ تابعی پیوسته باشد به طوری که به ازای هر دو عضو متمایز x و y در X ، $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر X فشرده باشد آنگاه f نقطه ثابت دارد.

(۲) ممکن است f نقطه ثابت نداشته باشد.

(۳) اگر $x_0 \in X$ وجود داشته باشد که $\{f^n(x_0) : n \in \mathbb{N}\}$ نقطه حدی داشته باشد، آنگاه f نقطه ثابت دارد $(f^n = f \circ f \circ \dots \circ f)$.

(۴) اگر X فشرده باشد، آنگاه ثابت $0 < \alpha < 1$ وجود دارد که به ازای هر دو نقطه x و y در X داریم $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$

۷- نقیض گزاره زیر کدام است؟

دنباله توابع حقیقی $\{f_n\}$ بر مجموعه X به طور یکنواخت به تابع f میل می کند. ($0 < \varepsilon$ و $n, N \in \mathbb{N}$ فرض شده اند).

$$(1) \forall \varepsilon \forall N \exists n \exists x (x \in X \& n \geq N \& |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

$$(2) \exists \varepsilon \forall N \exists n \exists x (x \in X \& n \geq N \& |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

$$(3) \exists \varepsilon \forall N \forall n \exists x (x \in X \& n \geq N \& |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

$$(4) \exists \varepsilon \exists N \exists n \forall x (x \in X \& n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon)$$

۸- فرض کنید تابع $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = \frac{m}{n}, y = \frac{p}{n}, (m,n)=1, (p,n)=1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تعریف شده باشد. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x,y) dx dy = 1 \quad (1)$$

$$\iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x,y) dx dy = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y) dy \right] dx = 0 \quad (3)$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y) dy \right] dx = 1 \quad (4)$$

۹- فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر ریمان بر بازه $[a,b]$ باشد و دنباله توابع $\{F_n\}$ بر $[a,b]$ با

$$\text{ضابطه } F_n(x) = \int_a^x f_n(t) dt \text{ تعریف شود. در این صورت کدام گزینه نادرست است؟}$$

(۱) اگر دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت همگرا به صفر باشد آنگاه $\{F_n\}$ هم یکنواخت همگرا به صفر است

(۲) اگر دنباله $\{f_n\}$ یکنواخت کران‌دار باشد آنگاه $\{F_n\}$ یک زیر دنباله یکنواخت همگرا دارد.

(۳) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع پیوسته و یکنواخت همگرا باشد، آنگاه دنباله $\{F_n\}$ یکنواخت همگرا به تابعی است که لزوماً به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر نیست.

(۴) اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای نزولی از توابع پیوسته و نقطه‌وار همگرا به صفر باشد، آنگاه دنباله $\{F_n\}$ یکنواخت همگرا به صفر است.

- ۱۰- فرض کنید A یک ماتریس 3×3 وارون پذیر با درایه‌های واقع در میدان F باشد. اگر $\det(A) = 1$ و $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^{-1}) = 0$ ، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

$$A^5 = I \quad (1)$$

$$A^2 = I \quad (2)$$

$$A^3 = I \quad (3)$$

$$A^4 = I \quad (4)$$

- ۱۱- اگر A ماتریسی 3×3 باشد و مقادیر ویژه آن یک تصاعد حسابی با قدر نسبت مثبت تشکیل دهند به فرض اینکه $\text{tr}(A) = 9$ و $\det(A) = -21$ ، آنگاه بزرگترین مقدار ویژه عبارت است از:

$$4 \quad (1)$$

$$7 \quad (2)$$

$$8 \quad (3)$$

$$9 \quad (4)$$

- ۱۲- فرض کنید A یک ماتریس 4×4 با درایه‌های حقیقی باشد به طوری که $A^2 + 2A + 3I = 0$ ، در این صورت $\text{tr}(A^{-1})$ برابر است با:

$$\frac{2}{3} \quad (1)$$

$$-\frac{2}{3} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$-\frac{4}{3} \quad (4)$$

- ۱۳- فرض کنید $A_1, A_2, \dots, A_{20} \in M_{10}(\mathbb{R})$ ماتریس‌های ناصفر بوده و $A_1 A_2 \dots A_{20} = 0$ ، در این صورت

$$\text{حداکثر مقدار } \sum_{i=1}^{20} \text{rank}(A_i) \text{ برابر کدام یک است؟}$$

$$50 \quad (1)$$

$$100 \quad (2)$$

$$190 \quad (3)$$

$$199 \quad (4)$$

- ۱۴- اگر x ماتریسی $n \times 1$ روی میدان F باشد آنگاه $\det(I_n + xx^t)$ برابر است با:

$$1 + x^t x \quad (1)$$

$$1 - x^t x \quad (2)$$

$$(1 + x^t x)^2 \quad (3)$$

$$(1 - x^t x)^2 \quad (4)$$

۱۵- فرض کنید A ماتریسی 2×2 است به طوری که $\text{tr}(A) = \frac{1}{2} \det(A)$ ، در این صورت کدام یک از مقادیر زیر

نمی تواند مقدار ویژه A باشد؟

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) -۱

(۴) $\frac{1}{2}$

۱۶- اگر $A \in M_{10}(\mathbb{R})$ و $B \in M_{12}(\mathbb{R})$ و $\det(A) = 2$ و $\det(B) = 3$ ، در این صورت $\det(A \otimes B)$ برابر است با: (اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ در این صورت $A \otimes B = (a_{ij}b_{kl})$)

(۱) $2^{10}3^{12}$

(۲) $2^{12}3^{10}$

(۳) 6^{10}

(۴) 12^{10}

۱۷- فرض کنید G یک گروه ساده از مرتبه ۱۶۸ باشد. در این صورت تعداد عناصر از مرتبه ۷ در گروه G برابر

است با:

(۱) ۶

(۲) ۷

(۳) ۲۴

(۴) ۴۸

۱۸- فرض کنید G گروه ماتریس های 2×2 با دترمینان ۱ و با درایه های حقیقی است. کدام یک از گزینه های زیر صحیح است؟

(۱) G گروهی ساده است.

(۲) مرکز گروه G بدیهی است.

(۳) G بیش از یک زیرگروه از مرتبه ۲ دارد.

(۴) G دارای نامتناهی عضو مرتبه متناهی است.

۱۹- فرض کنید G گروهی متناهی است که برای هر زیرگروه دوری مانند H از G داریم $\frac{N_G(H)}{C_G(H)} = |\text{Aut}(H)|$

در این صورت :

(۱) اگر عدد اول p مرتبه گروه را عاد کند آنگاه $|G| \mid p(p-1)$

(۲) هر زیرگروه دوری در G نرمال است.

(۳) G گروهی آبلی است.

(۴) G گروهی از مرتبه فرد است.

۲۰- چند جمله‌ای $f(x) = 3 + 2x + 4x^2 \in \mathbb{Z}_8[x]$

(۱) خود توان است.

(۲) مقسوم علیه صفر است.

(۳) وارون پذیر است.

(۴) پوچ توان است.

۲۱- کدام گزینه در مورد حلقه $\frac{\mathbb{Z}[x]}{(2x-1)}$ درست است؟

(۱) با حلقه $\left\{ f\left(\frac{1}{2}\right) \mid f(x) \in \mathbb{Z}[x] \right\}$ یکرخت است.

(۲) با حلقه $\mathbb{Z}_2$ یکرخت است.

(۳) با حلقه $\mathbb{Z}$ یکرخت است.

(۴) میدان است.

در تمامی سؤال‌های زیر حلقه‌ها یک‌دار و مدول‌ها یکانی می‌باشند.

۲۲- فرض کنید F یک گروه آزاد غیر آبدی باشد. در این صورت:

(۱) عنصری غیر بدیهی در F با مرتبه متناهی وجود دارد.

(۲) عنصری غیر بدیهی در F وجود دارد که مرکز ساز آن غیر دوری است.

(۳) عنصری غیر بدیهی در F وجود دارد که مرکز ساز آن غیر آبدی است.

(۴) $C_F(a)$ که $a \in F$ و $a \neq 1$ ، گروهی دوری است.

۲۳- گروه $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ با کدام گروه یکرخت است؟

(۱) $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

(۲) $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

(۳) $\mathbb{R}$

(۴) $\mathbb{Q}$

۲۴- فرض کنید که $\varphi: M \rightarrow F$ یک R - همریختی پوشا باشد که در آن F آزاد است. در این صورت کدام

گزینه صحیح است؟

(۱) M پروژکتیو (تصویری) است اگر و تنها اگر $\ker \varphi$ پروژکتیو باشد.

(۲) اگر $\ker \varphi$ پروژکتیو باشد آنگاه M پروژکتیو است ولی برعکس درست نیست.

(۳) اگر M پروژکتیو باشد آنگاه $\ker \varphi$ پروژکتیو است ولی برعکس درست نیست.

(۴) هیچ ارتباطی بین پروژکتیو بودن M و $\ker \varphi$ وجود ندارد.

۲۵- فرض کنید F یک میدان بوده و $R = M_p(F)$. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) یک مدول روی R وجود دارد که نه تصویری است و نه تزریقی (انژکتیو)
- (۲) هر مدول روی R هم تزریقی (انژکتیو) است و هم تصویری است.
- (۳) یک مدول روی R وجود دارد بطوری که تصویری است ولی تزریقی (انژکتیو) نیست.
- (۴) یک مدول روی R وجود دارد بطوری که تزریقی (انژکتیو) است ولی تصویری نیست.

۲۶- تعداد حلقه‌های ۸ عضوی، که عضو پوچ توان ناصفر ندارند، برابر است با:

- (۱) ۳
- (۲) ۴
- (۳) ۵
- (۴) ۶

۲۷- کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$ به عنوان $-\mathbb{Z}$ مدول تصویری است.
- (۲) $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}$ به عنوان $-\mathbb{Z}$ مدول انژکتیو است.
- (۳) فرض کنید $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ، $\phi(x) = 2x$ ، در این صورت $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ $1 \otimes \phi$ یک به یک است.

- (۴) فرض کنید $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ، $\phi(x) = 2x$ ، در این صورت $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ $1 \otimes \phi$ پوشا است.

۲۸- فرض کنید $R = \mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}$ و M یک R -مدول با تولید متناهی است و $I = \{(a, 0) \mid a \in \{0, 2, 4, 6\}\}$.

چنانچه $f: M \rightarrow N$ یک R -مدول همریختی و $\bar{f}: \frac{M}{IM} \rightarrow \frac{N}{IN}$ با ضابطه $\bar{f}(m + IM) = f(m) + IN$ داریم:

- (۱) اگر $\bar{f}$ یک به یک باشد آنگاه f نیز یک به یک است.
- (۲) اگر $\bar{f}$ یکرختی باشد آنگاه f نیز چنین است.
- (۳) اگر $\bar{f}$ پوشا باشد آنگاه f نیز پوشاست.
- (۴) $\bar{f}$ خوش تعریف نمی‌باشد.

۲۹- فرض کنید همریختی مدولی $f: M \rightarrow N$ دارای این خاصیت است: به ازای هر R - همریختی

$g: N \rightarrow M$ داریم $f \circ g \circ f = f$. که در آن M و N -مدول هستند. در این صورت:

- (۱) $\ker f$ یک جمعونند مستقیم M است.
- (۲) $\ker f \cong M$
- (۳) M و N یکرخت نمی‌باشند.
- (۴) $M \cong N$

۳۰- فرض کنید R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار است با این خاصیت که هر $R -$ مدول آزاد M تمام زیر مدولهایش نیز آزادند. در این صورت کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

(۱) هر $R -$ مدول انژکتیو (تزریقی) است.

(۲) R یک حوزه ایده‌آل اصلی است.

(۳) هر $R -$ مدول تصویری است.

(۴) R یک میدان است.

۳۱- فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار باشد به طوری که هر ایده‌آل ماکسیمال آن به صورت (e) است که

$$e^2 = e. \text{ کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟}$$

(۱) اگر $a \notin \{0, 1\}$ و a خودتوان باشد آنگاه (a) ایده‌آل ماکسیمال است.

(۲) $R \cong R_1 \times R_2$ که R_1 و R_2 حلقه هستند.

(۳) خودتوانی مانند a وجود دارد که $\frac{R}{\text{Ann}(a)}$ میدان است.

(۴) خودتوانی مانند a وجود دارد که $\frac{R}{\text{Ann}(1-a)}$ میدان است.

۳۲- فرض کنید M یک $R -$ مدول باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح نیست؟

(۱) $R -$ مدول N و $R -$ مدول تصویری P وجود دارد که $\frac{N}{P} \cong M$.

(۲) $R -$ مدول N و $R -$ مدول تصویری P وجود دارد که $\frac{P}{N} \cong M$.

(۳) $R -$ مدول N و $R -$ مدول انژکتیو I وجود دارد که $\frac{I}{N} \cong M$.

(۴) $R -$ مدول N و $R -$ مدول انژکتیو I وجود دارد که $\frac{N}{I} \cong M$.

۳۳- کدام گزینه در مورد $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\prod_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p_i} \right)$ صحیح است؟

(۱) با $\mathbb{Q} \times G$ یکرخت است که G یک گروه دوری است.

(۲) $\mathbb{Z} -$ مدولی یک عضوی است.

(۳) ناصفر است.

(۴) با $\prod_{i=1}^{\infty} (\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p_i})$ یکرخت است.

۳۴- کدام گزینه برای هر مجموعه اندازه‌پذیر $E \subseteq [0, 1]$ درست است؟ (m اندازه لبگ است و E° و $\bar{E}$ به ترتیب درون و بستار E هستند.)

(۱) اگر $m(E) > 0$ آنگاه $(\bar{E})^\circ \neq \emptyset$.

(۲) اگر $m(E) = 1$ آنگاه $\bar{E} = [0, 1]$.

(۳) اگر $m(E) = 1$ آنگاه $E^\circ \neq \emptyset$.

(۴) اگر $m(E) = 0$ آنگاه E نقطه حدى ندارد.

۳۵- اگر μ اندازه مثبت روی σ -جبر M باشد، کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(۲) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر دو بدو مجزا باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

(۳) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای تودرتو و صعودی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد و $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

(۴) اگر $\{A_n\}$ دنباله‌ای تودرتو و نزولی از مجموعه‌های اندازه‌پذیر باشد و $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

۳۶- اگر (X, M, μ) یک فضای اندازه و f و g توابعی حقیقی بر X باشند، کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $|f|$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

(۲) اگر f^n برای هر $n > 4$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه f اندازه‌پذیر است.

(۳) اگر $f + g$ اندازه‌پذیر باشد، آنگاه $f - g$ اندازه‌پذیر است.

(۴) اگر fg اندازه‌پذیر باشد، و g در هیچ نقطه‌ای صفر نشود، $\frac{f}{g}$ اندازه‌پذیر است.

۳۷- کدام گزینه درست است؟

(۱) اگر $E \subseteq \mathbb{R}$ و برای هر $x \in \mathbb{Q}$ و هر $n \in \mathbb{N}$ ، $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E$ اندازه‌پذیر لبگ باشد، آنگاه E اندازه‌پذیر لبگ است.

(۲) اگر $f_\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ خانواده‌ای از توابع اندازه‌پذیر لبگ باشد آنگاه $\sup_{\alpha} f_\alpha$ اندازه‌پذیر است.

(۳) اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تنها در دو نقطه ناپیوسته باشد، آنگاه f با تابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ تقریباً همه‌جا برابر است.

(۴) خانواده‌ای نامشمار از زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ با اندازه لبگ ناصفر دو بدو مجزا وجود دارد.

۳۸- کدام یک از گزینه‌های زیر به ازای هر تابع نامنفی و انتگرال پذیر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و هر $\alpha > 0$ برقرار است؟ (m) اندازه لبگ است و $(E = \{x: f(x) > \alpha\})$

$$m(E) \geq \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (۱)$$

$$m(E) \leq \alpha \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (۲)$$

$$m(E) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (۳)$$

$$m(E) \leq \int_{\mathbb{R}} f dm \quad (۴)$$

۳۹- فرض کنیم n عددی طبیعی، $X = \{1, 2, \dots, n\}$ ، μ اندازه شمارشی روی مجموعه توان $P(X)$ و اندازه ν روی $P(X)$ به صورت $(E \subseteq X)$ $\nu(E) = \begin{cases} 1 & n \in E \\ 0 & n \notin E \end{cases}$ تعریف شده باشد، اگر تابع $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ با

ضابطه $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ تعریف شود، مقدار انتگرال $\int_X f d(\mu + \nu)$ کدام است؟

$$\frac{n^2 + 1}{n(n+1)} \quad (۱)$$

$$\frac{n}{n+1} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \quad (۳)$$

$$(۴) \text{ صفر}$$

۴۰- اگر (X, M, μ) یک فضای اندازه و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال پذیر نامنفی روی X و f تابعی انتگرال پذیر و نامنفی روی X باشد، کدام گزینه نادرست است؟

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu \quad (۱)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu \quad (۲)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \text{ آنگاه } f_n \rightarrow f \text{ نقطه‌ای روی } X \quad (۳)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu \text{ آنگاه } f_n \rightarrow f \text{ به طور یکنواخت روی } X \quad (۴)$$

۴۱- اگر $f_n(x) = \frac{1 - \cos(x^n)}{x^{2n}}$ برای $x > 0$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f_n dm$ کدام است؟ (m اندازه لبگ است).

$$(۱) 0$$

$$(۲) 1$$

$$(۳) \frac{1}{2}$$

$$(۴) +\infty$$

۴۲- فرض کنیم (X, Σ, μ) یک فضای اندازه متناهی، $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ دنباله‌هایی از توابع اندازه‌پذیر f و g توابعی اندازه‌پذیر بر X باشند. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) اگر $f_n \rightarrow f$ در اندازه و $g_n \rightarrow g$ در اندازه آنگاه $\max\{f_n, g_n\} \rightarrow \max\{f, g\}$ در اندازه.

(۲) اگر $f_n \rightarrow f$ در اندازه و $g_n \rightarrow g$ در اندازه آنگاه $f_n g_n \rightarrow f g$ در اندازه.

(۳) اگر $f_n \rightarrow f$ در اندازه آنگاه هر زیر دنباله از $\{f_n\}$ تقریباً همه‌جا به f میل می‌کند.

(۴) اگر $f_n \rightarrow f$ تقریباً همه‌جا آنگاه $f_n \rightarrow f$ در اندازه.

۴۳- اگر $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر لبگ روی $[0, 1]$ و f تابعی انتگرال‌پذیر لبگ روی $[0, 1]$ باشد، کدام گزینه درست است؟ (m اندازه لبگ است).

(۱) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $f_n - f$ تقریباً همه‌جا کراندار است.

(۲) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^2 dm = 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$.

(۳) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$ آنگاه $f_n \rightarrow f$ تقریباً همه‌جا.

(۴) اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f| dm = 0$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_n - f|^2 dm = 0$.

۴۴- فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ و $T: X \rightarrow Y$ عملگری خطی و کراندار با برد چگال در Y باشد به طوری که برای هر $x \in X$ که $\|x\| = 1$ ، $\|Tx\| \geq 1$. کدام گزینه درست است؟

(۱) T پوشا است ولی یک‌به‌یک نیست.

(۲) T یک‌به‌یک است ولی پوشا نیست.

(۳) T دوسویی است و $\|T^{-1}\| \geq 1$.

(۴) T دوسویی است و $\|T^{-1}\| \leq 1$.

۴۵- فرض کنیم H یک فضای هیلبرت و M و N زیر فضاهای H باشند. در این صورت مجموعه $(M \cap N)^\perp$:

(۱) برابر بستار $M^\perp + N^\perp$ است، هرگاه M و N بسته باشند.

(۲) همواره مشمول در $M^\perp + N^\perp$ است.

(۳) همواره برابر بستار $M^\perp + N^\perp$ است.

(۴) همواره برابر $M^\perp + N^\perp$ است.

کلید اولیه سال 1394

کلید اولیه سال 1394

به اطلاع داوطلبان شرکت کننده در آزمون دکترا سال 1394 می رساند، کلید اولیه سوالات بر روی سایت سازمان سنجش قرار گرفته است. این کلید اولیه غیر قابل استناد است پس از دریافت نظرات داوطلبان و صاحب نظرات کلید نهایی سوالات تهیه و بر اساس آن کارنامه داوطلبان استخراج خواهد شد. در صورت تمایل می توانید حداکثر تا تاریخ 94/01/05 به سایت سازمان سنجش www.sanjesh.org از طریق سیستم ارسال و درخواست نسبت به تکمیل فرمی که برای دریافت این نظرات آماده گردیده است اقدام نمایید. لازم به ذکر است نظرات داوطلبان فقط از طریق اینترنت دریافت خواهد شد و به موارد ارسالی از طریق دیگر رسیدگی نخواهد شد.

کد رشته امتحانی	نام رشته امتحانی	گروه امتحانی	کد رشته امتحانی
2233	دانشگاه آزاد اسلامی	D	علوم پایه

گزینه صحیح	گزینه صحیح	گزینه صحیح	گزینه صحیح
4	1	31	1
2	3	32	3
1	3	33	3
3	2	34	2
1	4	35	4
4	2	36	2
2	1	37	1
3	3	38	3
3	1	39	1
3	4	40	4
2	3	41	3
4	3	42	3
3	2	43	2
1	4	44	4
2	1	45	1
1			
4			
4			
1			
3			
1			
4			
2			
1			
4			
3			
1			
2			

0000