

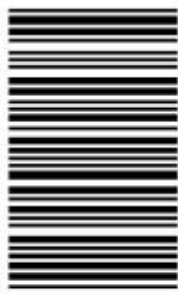
269

F

نام:

نام خانوادگی:

محل امضا:



269F

صبح جمعه
۱۳۹۵/۱۲/۶
دفترچه شماره (۱)



جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
سازمان سنجش آموزش کشور

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»

امام خمینی (ره)

آزمون ورودی
دوره دکتری (نیمه‌متمرکز) داخل - سال ۱۳۹۶

رشته امتحانی ریاضی محض (کد ۲۲۳۳)

مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

تعداد سؤال: ۴۵

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعه دروس تخصصی (مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی - مبانی ماتریس‌ها و جبر خطی - مبانی جبر - جبر پیشرفته - آنالیز حقیقی)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفندماه - سال ۱۳۹۵

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

مبانی آنالیز ریاضی - آنالیز ریاضی:

۱- اگر $a, b > 1$ ، مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{b}\right)^n$ کدام است؟

(۱) $a^{\frac{1}{b}}$

(۲) $\frac{a}{b}$

(۳) e^{a-b}

(۴) ۱

۲- فرض کنید $f: S \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی اکیداً یکنوا باشد. کدام گزینه درست است؟

(۱) باز یا بسته یا همبند بودن $f(S)$ ، پیوستگی f را نتیجه می‌دهد.

(۲) باز یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

(۳) همبند یا بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی باز بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

(۴) باز یا همبند بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه می‌دهد ولی بسته بودن $f(S)$ پیوستگی f را نتیجه نمی‌دهد.

۳- اگر تابع $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت باشد، کدام گزینه درست است؟

(۱) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ هر دو موجود هستند.

(۲) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیستند.

(۳) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ لزوماً موجود نیست.

(۴) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ موجود است ولی $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ لزوماً موجود نیست.

۴- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{2}{\pi} & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$ بر $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ، کدام گزینه درست است؟

(۱) تابع f دارای تابع اولیه است.

(۲) تابع f در هیچ نقطه‌ای از $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ پیوسته نیست.

(۳) انتگرال بالایی تابع f برابر یک است.

(۴) تابع f در خاصیت مقدار میانی صدق نمی‌کند.

۵- فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک است. متریک ρ را روی X به صورت $\rho(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ تعریف

می‌کنیم. کدام گزینه نادرست است؟

(۱) مترهای ρ و d معادل هستند.

(۲) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ همبند است اگر و تنها اگر نسبت به متر d همبند باشد.

(۳) $E \subseteq X$ نسبت به متر ρ فشرده است اگر و تنها اگر نسبت به متر d فشرده باشد.

(۴) به ازای هر فضای متریک Y ، تابع $f: X \rightarrow Y$ نسبت به متر ρ پیوسته است اگر و تنها اگر نسبت به متر d پیوسته باشد.

۶- اگر فضای توابع پیوسته حقیقی مقدار روی $[a, b]$ ، $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی در $[a, b]$ و ψ_n بر $C[a, b]$ به صورت $\psi_n(f) = f(x_n)$ تعریف شود، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $\{\psi_n\}$ به طور یکنواخت همگرا باشد کدام است؟

(۱) $\{x_n\}$ همگرا باشد.

(۲) $\{x_n\}$ کراندار باشد.

(۳) $\{x_n\}$ از مرحله‌ای به بعد ثابت باشد.

(۴) $\{x_n\}$ زیر دنباله‌ای همگرا داشته باشد.

۷- فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی و همگرا به صفر باشد. $X = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid \text{مجهز به متر}$
 $d((a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$ باشد و $E = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X \mid \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq 0\}$. کدام گزینه درست است؟

(۱) E همبند نیست.

(۲) $E^\circ = \emptyset$

(۳) $E' \neq E$

(۴) E بسته نیست.

۸- کدام گزینه شرط لازم و کافی برای فشردگی فضای متریک X نیست؟

(۱) هر تابع پیوسته حقیقی مقدار بر X اکسترمم‌های مطلق خود را اختیار می‌کند.

(۲) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y پیوسته یکنواخت است.

(۳) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y مجموعه‌های بسته را به مجموعه بسته می‌نگارد.

(۴) هر تابع پیوسته از X به یک فضای متریک Y کران‌دار است.

۹- برای هر $n \in \mathbb{N}$: تابع $f_n(x) = n(\sin(x + \frac{1}{n}) - \sin x)$ را بر \mathbb{R} در نظر می‌گیریم. در این صورت دنباله توابع $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ بر \mathbb{R} ...

(۱) به طور نقطه‌وار به تابع ثابت صفر همگرا است ولی نه به طور یکنواخت.

(۲) به طور نقطه‌وار به تابع $\cos x$ همگرا است ولی نه به طور یکنواخت.

(۳) به طور یکنواخت به تابع ثابت صفر همگرا است.

(۴) به طور یکنواخت به تابع $\cos x$ همگرا است.

مبانی ماتریس‌ها و جبرخطی - مبانی جبر:

۱۰- فرض کنید $G = S_6$ و $H = \{e, (12), (16), (36), (136), (163)\}$. قرار می‌دهیم $T = \langle H \rangle$. تعداد عناصر مرتبه ۲ در T برابر است با:

(۱) ۳

(۲) ۴

(۳) ۵

(۴) ۶

۱۱- فرض کنید G, H, K و N زیر گروه‌هایی از یک گروه باشند. کدام مورد درست است؟
 (۱) اگر $G' \times G' \cong H' \times H'$ که G' و H' زیر گروه‌های مشتق هستند، آنگاه $G = H$.

(۲) اگر گروه‌های فوق همگی آبلی باشند و $N < H$ و $K < G$ و $K \cong N$ و $G \cong H$ ، آنگاه $\frac{G}{K} = \frac{H}{N}$.

(۳) اگر $G \times H = G \times K$ ، آنگاه $H = K$.

(۴) اگر گروه‌های فوق آبلی بوده و $G \cap N = G \cap K$ ، آنگاه $\frac{G+N}{N} = \frac{G+K}{K}$.

۱۲- فرض کنید G یک گروه است و $g \in G$. در این صورت نگاشت $I_g : G \rightarrow G$ که $I_g(x) = gxg^{-1}$ را خودریختی داخلی نظیر g می‌نامیم. فرض کنید a و b دو عضو گروه G باشند که خودریختی‌های داخلی نظیر آن‌ها با یکدیگر برابرند. در این صورت کدام یک درست است؟

$$(۱) a = b$$

$$(۲) ab = ba$$

$$(۳) b = a^{-1}$$

$$(۴) ab \in Z(G)$$

۱۳- در گروه تقارن‌های یک n ضلعی منتظم که با D_{2n} نمایش داده می‌شود، اگر R یک دوران و T یک انعکاس باشد، که $RT = TR$ ، در این صورت کدام گزینه درست است؟

(۱) T در مرکز گروه قرار دارد.

(۲) R فقط می‌تواند دوران 360° باشد.

(۳) R در مرکز گروه قرار دارد.

(۴) T با هیچ انعکاسی غیر از خودش جابه‌جا نمی‌شود.

۱۴- فرض کنید K یک میدان شامل Q بوده و $[K : Q] = n$. اگر $\phi : K \rightarrow M_n(Q)$ یک تکریختی (منومورفیزم) حلقه‌ای باشد، n چه اعدادی می‌تواند باشد؟

$$(۱) ۱$$

$$(۲) ۱, ۲$$

$$(۳) ۱, ۲, ۴$$

(۴) نامتناهی حالت برای n وجود دارد.

۱۵- کدام مورد صحیح است؟

(۱) هر ایده‌آل ماکسیمال در حلقه R ، اول است.

(۲) هر ایده‌آل سره در حلقه R در یک ایده‌آل ماکسیمال قرار دارد.

(۳) هر ایده‌آل اول ناصفر ماکسیمال است.

(۴) اگر حلقه R یک‌دار و متناهی باشد، آنگاه تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال و تعداد ایده‌آل‌های اول R برابر است.

۱۶- فرض کنیم A یک ماتریس 4×5 و B یک ماتریس 5×4 با درایه‌های از میدان F باشند. به علاوه فرض کنیم رتبه

A برابر ۴ و رتبه B برابر ۳ باشند. کدام گزینه صحیح است؟

(۱) نه AB وارون‌پذیر است و نه BA .

(۲) هم AB وارون‌پذیر است و هم BA .

(۳) BA وارون‌پذیر است ولی AB لزوماً وارون‌پذیر نیست.

(۴) AB وارون‌پذیر است ولی BA لزوماً وارون‌پذیر نیست.

۱۷- ماتریس $A \in M_7(\mathbb{R})$ در رابطه $A^2 + 4A + 2I = 0$ صدق می‌کند. $\text{Tr}(A)$ کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمی‌تواند

باشد؟

(۱) -۱

(۲) -۳

(۳) -۵

(۴) -۷

۱۸- ماتریس $A \in M_5(\mathbb{R})$ در رابطه $A^2 - 4A - I = 0$ صدق می‌کند. اگر a_1, a_2, \dots, a_5 مقدار ویژه‌های A باشند،

مقدار $(a_1 - \frac{1}{a_1}) + (a_2 - \frac{1}{a_2}) + \dots + (a_5 - \frac{1}{a_5})$ کدام است؟

(۱) ۴

(۲) -۲۰

(۳) ۲۰

(۴) -۴

۱۹- ماتریس A یک ماتریس 1395×1395 است که اعضای روی قطر اصلی آن صفر و بقیه اعضا برابر با یک هستند.

این ماتریس روی میدان چند عضوی وارون پذیر است؟

(۱) ۴

(۲) ۹

(۳) ۱۷

(۴) ۴۱

۲۰- فرض کنید $A, B \in M_{10}(\mathbb{R})$ و هر دو دارای مقدار ویژه ۲ با تکرار ۷ باشند. اگر A و B قطری شدنی باشند، در

این صورت رتبه ماتریس $A - B$ حداکثر چه می‌تواند باشد؟

(۱) ۹

(۲) ۸

(۳) ۷

(۴) ۶

۲۱- فرض کنید $A \in M_{5 \times 4}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(A) = 3$ ، $B \in M_{3 \times 4}(\mathbb{R})$ و $\text{rank}(B) = 2$. در این صورت:

$\dim(\{X \in M_{4 \times 3}(\mathbb{R}) \mid AXB = 0\})$ برابر است با:

(۱) ۲

(۲) ۴

(۳) ۶

(۴) ۸

جبر پیشرفته:

۲۲- اشتراک همه ایده‌آل‌های اول حلقه $\frac{\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$ برابر است با:

(۱) $\frac{10\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

(۲) $\frac{15\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

(۳) $\frac{30\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

(۴) $\frac{60\mathbb{Z}}{120\mathbb{Z}}$

۲۳- \mathbb{Z} - مدول $(\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q})$ با کدام یک از \mathbb{Z} - مدول‌های زیر یکرخت است؟

(۱) \mathbb{Q}

(۲) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$

(۳) $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Q}$

(۴) $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}$

۲۴- \mathbb{R} حلقه جابه‌جایی و یک‌دار و M و N دو \mathbb{R} -مدول یکانی دوری فرض می‌شوند. اگر $\text{Ann}(M) = \text{Ann}(N)$ ،

کدام یک از موارد زیر درست است؟

(۱) $\text{Ann}(M \oplus N) \subsetneq \text{Ann}(M)$

(۲) $M = N$

(۳) $\text{Ann}(M) \subsetneq \text{Ann}(M \oplus N)$

(۴) $M \cong N$

۲۵- فرض کنید p یک عدد اول باشد. در این صورت تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه

$$Q_p = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, (p, n) = 1 \right\}$$

برابر است با:

(۱) ۱

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۴

۲۶- فرض کنید $\mathbb{R} = \mathbb{R}[[x]]$ حلقه سری‌های توانی صوری روی میدان اعداد حقیقی \mathbb{R} باشد، در این صورت کدام

یک از موارد زیر صحیح است؟

(۱) \mathbb{R} آرئینی است.

(۲) \mathbb{R} تنها یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.

(۳) هر ایده‌آل اول \mathbb{R} ماکسیمال است.

(۴) \mathbb{R} دارای عنصر پوچتوان ناصفر است.

۲۷- اگر R حلقه‌ای جابه‌جایی و یک‌دار باشد به گونه‌ای که برای ایده‌آل I ، یک R -زیر مدول از $R[x]$ مانند K موجود

باشد که $R[x] = I[x] \oplus K$ ، آنگاه:

(۱) $I[x]$ پروژکتیو و آزاد است.

(۲) $I[x]$ نه پروژکتیو است و نه آزاد.

(۳) $I[x]$ آزاد است ولی لزوماً پروژکتیو نیست.

(۴) $I[x]$ پروژکتیو است ولی لزوماً آزاد نیست.

۲۸- فرض کنید R حلقه توابع پیوسته از \mathbb{R} به \mathbb{R} با مجموع و حاصلضرب توابع باشد. در این صورت کدام گزینه

صحیح است؟

(۱) R یک حلقه تقسیم است.

(۲) R نوتری نیست.

(۳) حوزه صحیح است.

(۴) هر ایده‌آل اول R باتولید متناهی است.

۲۹- فرض کنید G یک گروه بوده و $f: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$ یک بروریختی (اپی‌مورفیسم) و $g: \mathbb{Z}^n \rightarrow G$ یک تکریختی

(منومورفیسم) باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟ (توجه کنید $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_n$ بار)

(۱) $G \cong \mathbb{Z}^n$.

(۲) G می‌تواند گروهی نآبلی باشد.

(۳) G دارای عنصر غیربدیهی از مرتبه متناهی است.

(۴) $G \cong \mathbb{Z}^r \times H$ که H گروهی متناهی از مرتبه حداقل ۲ است.

۳۰- فرض کنید $R = Q[x, y, z]$ و $M = \frac{R}{I}$ که در آن $I = \langle x+z, y^2z \rangle$. چنانچه $f: M \rightarrow M$ یک هم‌ریختی

R -مدولی پوشا باشد کدام گزینه صحیح است؟

(۱) $\text{Ker} f^2 \neq \text{Ker} f$.

(۲) زیر مدول ماکسیمال و ناصفر N موجود است که $\text{Ker} f = N$.

(۳) $\text{Ker} f = 0$.

(۴) زیر مدول مینیمال و ناصفر N موجود است که $\text{Ker} f = N$.

۳۱- فرض کنید R یک حوزه ایده‌آل اصلی باشد که میدان نیست و M یک R -مدول باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر

نادرست است؟

(۱) M تصویری است اگر و تنها اگر M آزاد باشد.

(۲) اگر M با تولید متناهی باشد، آنگاه طول M متناهی است.

(۳) تزریقی است اگر و تنها اگر M بخش‌پذیر باشد.

(۴) اگر M هم تصویری و هم تزریقی باشد، آنگاه $M = 0$.

۳۲- فرض کنیم R یک حلقه جابه‌جایی و یک‌دار و I یک ایده‌آل آن باشد به طوری که $\frac{R}{I}$ یک R -مدول تصویری

است. در این صورت:

(۱) I یک ایده‌آل اصلی و اول است.

(۲) I یک ایده‌آل اصلی و پوچتوان است.

(۳) I یک ایده‌آل خودتوان و اول است.

(۴) I یک ایده‌آل اصلی و خودتوان است.

۳۳- فرض کنیم R یک حلقه یک‌دار و جابه‌جایی و M و N دو R -مدول باشند به طوری که $M \otimes_R N$ آزاد ناصفر

است. در این صورت $M \oplus N$ یک R -مدول است.

(۱) آزاد است.

(۲) نوتری است.

(۳) تصویری است.

(۴) بخش‌پذیر است.

آنالیز حقیقی:

۳۴- فرض کنید m اندازه لیگ روی \mathbb{R} ، m^* اندازه خارجی متناظر با m و A و B دو مجموعه در \mathbb{R} باشند به طوری که $B \subseteq A$ و $m(B) = m^*(A)$. در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$(1) \quad m^*(A \setminus B) = 0$$

(۲) مجموعه A ، لیگ اندازه‌پذیر است.

(۳) مجموعه $A \setminus B$ ، لیگ اندازه‌پذیر است.

(۴) اگر $m^*(A) < \infty$ آنگاه مجموعه A لیگ اندازه‌پذیر است.

۳۵- فرض کنید $\{E_i\}$ یا $E^c = [0, 2] \setminus E$ حداکثر شمارا باشد $A = \{E \subseteq [0, 2]\}$ و تابع μ بر A با ضابطه

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 & \text{حداکثر شمارا باشد} \\ 2 & \text{حداکثر شمارا نباشد} \end{cases}$$

طوری که E_i^c حداکثر شمارا باشد، آنگاه کدام گزینه درست است؟

$$(1) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 0$$

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) = 0$$

$$(3) \quad \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = 2$$

$$(4) \quad \sum_{i=2}^{\infty} \mu(E_i) = 2$$

۳۶- اگر $\{E_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های اندازه‌پذیر در فضای اندازه (X, Σ, μ) باشد در چه صورت تساوی زیر برقرار است؟

$$\liminf \mu^*(E_n) = \mu^*(\liminf E_n)$$

(۱) دنباله $\{\mu^*(E_n)\}_{n=1}^{\infty}$ در $[0, \infty]$ همگرا باشد.

(۲) $\{E_n\}$ دنباله‌ای صعودی باشد.

(۳) $\{E_n\}$ دنباله‌ای نزولی باشد.

$$(4) \quad \limsup \mu^*(E_n) \geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

۳۷- کدام گزینه درست است؟

- (۱) اگر $\{f_\gamma\}_{\gamma \in I}$ خانواده‌ای از توابع لبگ اندازه‌پذیر بر \mathbb{R} باشد آنگاه $f = \sup f_\gamma$ اندازه‌پذیر است.
 (۲) اگر دنباله توابع لبگ اندازه‌پذیر $\{f_n\}$ بر \mathbb{R} نقطه‌وار به صفر همگرا باشد آنگاه در اندازه نیز به صفر همگراست.
 (۳) تابع لبگ اندازه‌پذیر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ ، $f(x+y) = f(x) + f(y)$ اما f پیوسته نیست.
 (۴) تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ لبگ اندازه‌پذیر است اگر و تنها اگر برای زیرمجموعه‌ای چگال در \mathbb{R} مانند D و برای هر $\alpha \in D$ مجموعه $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ لبگ اندازه‌پذیر باشد.

۳۸- برای دنباله $\{x_n\}$ تعریف می‌کنیم $\sup_n |x_n|$ ، $\|\{x_n\}\|_\infty$ ، کدام فضا نسبت به $\|\cdot\|_\infty$ باناخ است؟

$$(۱) \{ \{x_n\} : \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \}$$

$$(۲) \{ \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \}$$

$$(۳) \{ \{x_n\} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \}$$

$$(۴) \{ \{x_n\} : \text{فقط تعداد متناهی } x_n \text{ نامصفر است} \}$$

۳۹- کدام گزینه صحیح است؟

$$(۱) \text{ اگر } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ پیوسته و کراندار باشد، آنگاه } \inf \{ \alpha : m(\{x : f(x) > \alpha\}) = 0 \} = \sup \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$$

$$(۲) \text{ اگر برای هر } n \in \mathbb{N} \text{، } f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \text{ و } f_n \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} 0 \text{ آنگاه } f_n \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{R})} 0$$

$$(۳) \text{ اگر } 1 < p < q < \infty \text{ آنگاه } L^q(\mathbb{R}) \subseteq L^p(\mathbb{R})$$

$$(۴) L^\infty(\mathbb{R}) \subseteq L^1(\mathbb{R})$$

۴۰- فرض کنید توابع حقیقی f و f_n بر \mathbb{R} لبگ انتگرال‌پذیر باشند، به طوری که دنباله $\{f_n\}$ به تابع f تقریباً همه جا به طور نقطه‌ای همگراست. در این صورت کدام گزینه با $\int_{\mathbb{R}} |f_n - f| dm \rightarrow 0$ معادل است؟

$$(۱) \int_{\mathbb{R}} |f_n| dm \rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f| dm$$

$$(۲) \int_{\mathbb{R}} f_n dm \rightarrow \int_{\mathbb{R}} f dm$$

$$(۳) f_n \rightarrow f \text{ در اندازه}$$

$$(۴) f_n \rightarrow f \text{ به‌طور یکنواخت بر } \mathbb{R}$$

۴۱- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^n \frac{x \ln(1 + \frac{x}{n})}{1+x} dx$ کدام است؟

$$(۱) \ln 2$$

$$(۲) \ln 2 - \frac{1}{2}$$

$$(۳) \ln 2 - 1$$

$$(۴) 2 \ln 2 - 1$$

۴۲- فرض کنید m اندازه لبگ روی \mathbb{R} و m^* اندازه خارجی متناظر با m باشد و

$$A = \{m^*(E) \mid E \subseteq \mathbb{R} \text{ نامتناهی با درون تهی باشد}\}$$

در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$A = \{0\} \quad (1)$$

$$A = [0, +\infty] \quad (2)$$

$$A = \{0, +\infty\} \quad (3)$$

$$A = [0, +\infty) \quad (4)$$

$$43- \text{ اگر } E \subseteq [0, \frac{\pi}{4}] \text{ زیرمجموعه اندازه ناپذیر لبگ باشد و } f(x) = \begin{cases} X_E(x) + \sin x & x \in Q \cap [0, \frac{\pi}{4}] \\ [x] + \sin x & x \in Q^c \cap [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases} \text{ کدام گزینه}$$

درست است؟

(1) f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ اندازه‌پذیر نیست.

(2) f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ انتگرال‌پذیر نیست.

(3) تابع f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است.

(4) تابع f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ لبگ انتگرال‌پذیر است و مقدار انتگرال f بر $[0, \frac{\pi}{4}]$ برابر $\frac{\pi}{4} - 1$ است.

۴۴- فرض کنید $M = \{f \in L^1(\mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1], f(x) = 0\}$ و $P_M : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^1(\mathbb{R})$ تصویر متعامد روی M

باشد. برای هر $f \in L^1(\mathbb{R})$ داریم:

$$P_M(f) = f \quad (1)$$

$$P_M(f) = f \cdot x_{[0, 1]} \quad (2)$$

$$P_M(f) = 1 - f \quad (3)$$

$$P_M(f) = (1 - f) \cdot x_{[0, 1]} \quad (4)$$

۴۵- عملگر خطی $T : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$T(x, y) = (x - y, 0) \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

(برای هر $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، $\|(x, y)\|_p = \sqrt{x^2 + y^2}$) در این صورت کدام گزینه درست است؟

$$\|T\| = 2\sqrt{2} \quad (1)$$

$$\|T\| = 1 \quad (2)$$

$$\|T\| = \sqrt{2} \quad (3)$$

(4) عملگر T بی‌کران است.

کلید اولیه دکترای سال 1396

کلید اولیه دکترای سال 1396

به اطلاع داوطلبان شرکت کننده در آزمون دکتری سال 1396 می‌رساند، در صورت تمایل می‌توانید حداکثر تا تاریخ 95/12/16 با مراجعه به سیستم پاسخگویی اینترنتی، نسبت به تکمیل فرم «اعتراض به کلید سوالات آزمون» اقدام نمایید. لازم به ذکر است نظرات داوطلبان فقط از طریق سامانه پاسخگویی اینترنتی و فرم مذکور دریافت خواهد شد و به موارد ارسالی از طرف دیگر و پس از تاریخ اعلام شده، به هیچ عنوان رسیدگی نخواهد شد.

عنوان دفترچه	نوع دفترچه	شماره پاسخنامه	گروه امتحانی
ریاضی محض	F	1	علوم پایه

شماره سوال	گزینه صحیح	شماره سوال	گزینه صحیح
1	1	31	2
2	1	32	4
3	3	33	3
4	4	34	4
5	1	35	3
6	3	36	2
7	2	37	4
8	2	38	1
9	4	39	1
10	1	40	1
11	4	41	4
12	2	42	2
13	3	43	3
14	2	44	2
15	4	45	3
16	1		
17	1		
18	3		
19	2		
20	4		
21	3		
22	3		
23	1		
24	4		
25	1		
26	2		
27	4		
28	2		
29	1		
30	3		

خروج