

277F

کد کنترل

277

F

**آزمون (نیمه‌متمرکز) ورود به دوره‌های دکتری - سال ۱۴۰۱****دفترچه شماره (۱)**

صبح جمعه ۱۴۰۰/۱۲/۶

جمهوری اسلامی ایران  
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری  
سازمان سنجش آموزش کشور«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»  
امام خمینی (ره)**رشته فیزیک**  
**(کد ۲۲۳۸)**

جدول مواد امتحانی، تعداد، شماره سؤال‌ها و زمان پاسخ‌گویی

زمان پاسخ‌گویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
۱۵۰ دقیقه	۴۵	۱	۴۵	مجموعه دروس تخصصی: - مکانیک کوانتومی و مکانیک کوانتومی پیشرفته - الکترومغناطیس و الکتروپنایمیک - ترمودینامیک و مکانیک آماری پیشرفته ۱

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤال‌ها به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و یا متخلفان برابر مقررات رفتار می‌شود.

\* متقاضی گرامی، وارد نکردن مشخصات و امضا در کادر زیر، به منزله غیبت و حضور نداشتن در جلسه آزمون است.

اینجانب ..... با شماره داوطلبی ..... با آگاهی کامل، یکسان بودن شماره صندلی خود را با شماره داوطلبی مندرج در بالای کارت ورود به جلسه، بالای پاسخنامه و دفترچه سؤال‌ها، نوع و کد کنترل درج شده بر روی دفترچه سؤال‌ها و پایین پاسخنامه‌ام را تأیید می‌نمایم.

امضا:

۱- مجموعه  $S$  متشکل از همه توابع  $N$  متغیره  $S = \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}\}$  را در نظر بگیرید که  $\mathbb{R}$  مجموعه اعداد حقیقی و  $\mathbb{C}$  مجموعه اعداد مختلط هستند. با استفاده از تعریف متعارف جمع دو تابع و ضرب عدد در تابع، یک فضای برداری یا فضای هیلبرت روی میدان  $\mathbb{F}$  ساخته می‌شود. کدام عبارت درست است؟

- ۱) از کل مجموعه  $S$  می‌توان یک فضای هیلبرت روی میدان اعداد حقیقی  $(\mathbb{F} = \mathbb{R})$  ساخت که بعد آن متناهی است.
- ۲) از کل مجموعه  $S$  می‌توان یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی  $(\mathbb{F} = \mathbb{R})$  ساخت که بعد آن متناهی است.
- ۳) از کل مجموعه  $S$  می‌توان یک فضای هیلبرت روی میدان اعداد مختلط  $(\mathbb{F} = \mathbb{C})$  ساخت که بعد آن نامتناهی است.
- ۴) از کل مجموعه  $S$  می‌توان یک فضای برداری روی میدان اعداد مختلط  $(\mathbb{F} = \mathbb{C})$  ساخت که بعد آن نامتناهی است.

۲- هامیلتونی یک ذره اسپین  $\frac{1}{2}$  در پایه متشکل از ویژه بردارهای متعارف عملگر  $S_z$  به شکل  $H = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  است که  $a$  ضریبی حقیقی است. نمایش این هامیلتونی در پایه متشکل از ویژه بردارهای  $S_y$  یعنی بردارهای  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$  و

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \text{ کدام است؟}$$

$$\frac{a}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\frac{a}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\frac{a}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

۳- نوسانگر هماهنگ یک بعدی به جرم  $m$  و بسامد زاویه‌ای  $\omega$  در نظر بگیرید. اگر  $|\beta\rangle$  ویژه بردار بهنجار عملگر پایین‌بر باشد:  $\langle \beta | \beta \rangle = a$ ، عدم قطعیت ممنتوم خطی نوسانگر در حالت  $|\beta\rangle$  کدام است؟  $\text{Re}\beta$  و  $\text{Im}\beta$  به ترتیب بخش

$$\text{حقیقی و موهومی } \beta \text{ هستند، } a = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \left( x + i \frac{p}{m\omega} \right) \text{ و } \Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$$

$$(1) \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}$$

$$(2) \sqrt{\hbar m \omega} (1 + |\beta|^2)^{1/2}$$

$$(3) \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (4(\text{Re}\beta)^2 + 4(\text{Im}\beta)^2 - 1)^{1/2}$$

$$(4) \sqrt{\hbar m \omega} (6(\text{Re}\beta)^2 + 2(\text{Im}\beta)^2 - 1)^{1/2}$$

۴- ذره‌ای به جرم  $m$  و بار الکتریکی  $q$  در میدان الکترومغناطیسی با پتانسیل‌های اسکالر  $\phi(\vec{x}, t)$  و برداری  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  قرار دارد. با تبدیل پیمانه‌ای  $\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$  و  $\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \Lambda$  که  $\Lambda(\vec{x}, t)$  تابع دلخواه مشتق‌پذیری است، عملگر  $T(\Lambda)$  که روی فضای هیلبرت ذره اثر می‌کند چنان تعریف می‌شود که مقدار چشم‌داشتی عملگر مکان  $\vec{x}$

و عملگر  $\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A}$  ناورد باشند. در این صورت  $T(\Lambda)$  چه شرایطی باید داشته باشد؟

$$(1) T^\dagger x_i T = x_i, \quad T^\dagger \left( p_i - \frac{q}{c} A_i - \frac{q}{c} \nabla_i \Lambda \right) T = p_i - \frac{q}{c} A_i \quad i=1,2,3$$

$$(2) T^\dagger x_i T = x_i, \quad T^\dagger \left( p_i - \frac{q}{c} A_i \right) T = p_i - \frac{q}{c} (A_i + \nabla_i \Lambda) \quad i=1,2,3$$

$$(3) T^\dagger x_j T = x_j, \quad T^\dagger p_i T = -p_i, \quad T^\dagger (A_i + \nabla_i \Lambda) T = A_i + \nabla_i \Lambda \quad i=1,2,3$$

$$(4) T^\dagger x_i T = -x_i, \quad T^\dagger p_i T = p_i, \quad T^\dagger (A_i + \nabla_i \Lambda) T = A_i + \nabla_i \Lambda \quad i=1,2,3$$

۵- کدام عبارت در مورد نامساوی‌های بل نادرست است؟

(۱) این نامساوی‌ها با نظریه‌های متغیر نهان سازگاری دارند.

(۲) نتایج آزمون‌های تجربی مختلف، برخلاف پیش‌بینی این نامساوی‌ها بوده است.

(۳) این نامساوی‌ها برای سیستم‌های چند ذره‌ای با حالت درهم تنیده (entangled) صادق است.

(۴) این نامساوی‌ها براساس نظریه مکانیک کوانتومی متعارف (ارتدکس) به دست آمده است.

۶- آنسامبلی از سیستم‌هایی که فضای هیلبرت آن‌ها دوبعدی است در نظر بگیرید. کدام ماتریس چگالی معرف یک

آنسامبل خالص از این سیستم است؟

$$(1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

۷- اگر  $U_S(t, t_0)$  و  $U_I(t, t_0)$  به ترتیب عملگرهای تحول زمانی در تصویر شرودینگر و برهمکنش باشند و هامیلتونی سیستم در تصویر شرودینگر به شکل  $H = H_0 + H_1(t)$  باشد. کدام رابطه درست است؟  
( $H_0$  مستقل از زمان است.)

$$U_S(t, t_0) = e^{-iH_0 t_0/\hbar} U_I(t, t_0) e^{iH_0 t/\hbar} \quad (۱)$$

$$U_I(t, t_0) = e^{iH_1 t/\hbar} U_S(t, t_0) e^{-iH_0 t_0/\hbar} \quad (۲)$$

$$U_I(t, t_0) = e^{iH_0 t/\hbar} U_S(t, t_0) e^{-iH_0 t_0/\hbar} \quad (۳)$$

$$U_S(t, t_0) = e^{iH_1 t/\hbar} U_I(t, t_0) e^{-iH_0 t_0/\hbar} \quad (۴)$$

۸- اگر  $|\ell, m\rangle$  ویژه بردار مشترک عملگرهای  $L_z$  و  $L^2$  و  $|\hat{n}\rangle$  ویژه بردار مکان و  $\hat{n}$  برداری که در مختصات کروی به شکل  $\hat{n} = (\theta, \phi)$  داده شده،  $\hat{z}$  برداری به طول واحد در امتداد محور  $Z$  و  $\Pi$  عملگر پاریته باشند، کدام عبارت در همه موارد نمی‌تواند درست باشد؟ ( $L_+ = L_x + iL_y$ )

$$\langle \hat{n} | L_+ | \ell, \ell \rangle = 0 \quad (۱)$$

$$\langle \ell, m | \hat{z} \rangle = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \quad (۲)$$

$$\Pi | \ell, m \rangle = (-1)^\ell | \ell, m \rangle \quad (۳)$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \hat{n} | \ell, m \rangle = m \langle \hat{n} | \ell, m \rangle \quad (۴)$$

۹- اگر  $\Theta$  عملگر وارونی زمان،  $\vec{S}$  عملگر اسپین،  $\vec{L}$  عملگر ممتموم زاویه‌ای مداری،  $|\psi\rangle$  بردار دلخواهی از فضای هیلبرت،  $|\mathbf{j}, m\rangle$  ویژه بردار مشترک عملگرهای  $J_z$  و  $J^2$  و ضریب  $\alpha$  عددی حقیقی باشند، کدام رابطه نادرست است؟

$$\langle \dot{x}' | \Theta | \psi \rangle = \langle \dot{x}' | \psi \rangle^* \quad (۱)$$

$$\Theta (\vec{S} \cdot \vec{L}) \Theta^{-1} = \vec{S} \cdot \vec{L} \quad (۲)$$

$$\Theta | \mathbf{j}, m \rangle = i^m | \mathbf{j}, -m \rangle \quad (۳)$$

$$\Theta e^{-i\alpha J_y} \Theta^{-1} = e^{i\alpha J_y} \quad (۴)$$

۱۰- ذره‌ای به جرم  $m$  و انرژی  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  تحت تأثیر پتانسیل یوکاوا  $V(\mathbf{r}) = \beta \frac{e^{-\mu r}}{r}$  که  $\mu$  و  $\beta$  ضرایب ثابت مثبتی هستند، پراکنده می‌شود. دامنه پراکندگی  $f(\theta)$  در تقریب اول بورن کدام است؟ ( $\theta$  زاویه پراکندگی است.)

$$\frac{m\beta}{\hbar^2 (\mu^2 + k^2 \sin^2 \theta)} \quad (۱)$$

$$\frac{2m\beta}{\hbar^2 (\mu^2 + k^2 \sin^2 \theta)} \quad (۲)$$

$$\frac{2m\beta}{\hbar^2 (\mu^2 + k^2 \sin^2(\theta/2))} \quad (۳)$$

$$\frac{m\beta}{\hbar^2 (\mu^2 - k^2 \sin^2(\theta/2))} \quad (۴)$$

۱۱- سیستم دو تراز با هامیلتونی  $H_0$  که ویژه حالت‌های آن  $\psi_1$  و  $\psi_2$  با ویژه مقادیرهای  $E_1$  و  $E_2$  هستند را در نظر بگیرید. اگر در زمان  $t = -\infty$  سیستم در حالت  $\psi_1$  باشد و در این لحظه تحت تاثیر هامیلتونی اختلالی

$$H'(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha e^{-t^2/\tau^2} \\ \alpha e^{-t^2/\tau^2} & 0 \end{pmatrix}$$

قرار گیرد که  $\alpha$  و  $\tau$  ثابت‌های مثبتی در آن هستند. در اختلال مرتبه اول،

احتمال آن که در لحظه  $t = +\infty$  سیستم در حالت  $\psi_2$  یافت شود، کدام است؟  $(\omega_0 = (E_2 - E_1)/\hbar)$

$$\frac{\pi\alpha^2\tau^2}{\hbar^2} \quad (1)$$

$$\frac{\pi\alpha^2\tau^2}{\hbar^2} e^{-\tau^2\omega_0^2} \quad (2)$$

$$\frac{\pi\alpha^2\tau^2}{2\hbar^2} e^{-2\tau^2\omega_0^2} \quad (3)$$

$$\frac{\pi\alpha^2\tau^2}{\hbar^2} e^{-\tau^2\omega_0^2/2} \quad (4)$$

۱۲- ذره‌ای به جرم  $m$  و انرژی  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  از سمت چپ به پتانسیل یک‌بعدی:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a \leq x \leq 0 \\ \infty & x > 0 \end{cases}$$

برخورد می‌کند، که  $V_0$  و  $a$  مقادیر ثابت مثبتی هستند. اگر موج ورودی  $Ae^{ikx}$  باشد، موج بازتابی کدام است؟

$$(k' = \sqrt{2m(E+V_0)}/\hbar)$$

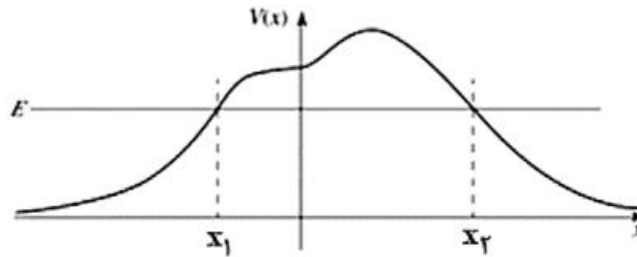
$$Ae^{-\gamma ika} \left[ \frac{k + ik' \cot(k'a)}{k - ik' \cot(k'a)} \right] e^{-ikx} \quad (1)$$

$$Ae^{-\gamma ika} \left[ \frac{k - ik' \tan(k'a)}{k + ik' \tan(k'a)} \right] e^{-ikx} \quad (2)$$

$$Ae^{-\gamma ika} \left[ \frac{k - ik' \cot(k'a)}{k + ik' \cot(k'a)} \right] e^{-ikx} \quad (3)$$

$$Ae^{-\gamma ika} \left[ \frac{k + ik' \tan(k'a)}{k - ik' \tan(k'a)} \right] e^{-ikx} \quad (4)$$

۱۳- ذره‌ای به جرم  $m$  و انرژی  $E$  از سمت راست به سد پتانسیل  $V(x)$  به شکل زیر برخورد می‌کند. در تقریب WKB کدام تابع موج درست است؟ ( $\Lambda$  و  $B$  ضرایبی ثابت،  $p = \sqrt{2m(E - V(x))}$  و  $q = \sqrt{2mV(x)}$  هستند).



$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ A e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'} + B e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_2}^x p(x') dx'} \right] \quad \text{for } x > x_2 \quad (1)$$

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \left[ A e^{-\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx'} + B e^{\frac{i}{\hbar} \int_x^{x_2} p(x') dx'} \right] \quad \text{for } x > x_2 \quad (2)$$

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{q(x)}} \left[ A e^{-\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} q(x') dx'} + B e^{\frac{1}{\hbar} \int_x^{x_1} q(x') dx'} \right] \quad \text{for } x_1 < x < x_2 \quad (3)$$

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \left[ A e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x q(x') dx'} + B e^{\frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x q(x') dx'} \right] \quad \text{for } x < x_1 \quad (4)$$

۱۴- هامیلتونی  $H_0$  با ویژه مقدارهای  $E_n^0$  و ویژه بردارهای  $\psi_n^0$  داده شده در نظر بگیرید. اگر این هامیلتونی به شکل  $H = H_0 + \lambda H'$  مختل شود که  $\lambda \ll 1$  است. مقدار چشم‌داشتی عملگر مشاهده‌پذیر  $O$  در ویژه حالت  $n$  ام هامیلتونی  $H$  یعنی  $\langle \psi_n | O | \psi_n \rangle$  تا مرتبه اول از  $\lambda$  کدام است؟

$$\langle \psi_n^0 | O | \psi_n^0 \rangle + \lambda \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_n^0 | O | \psi_m^0 \rangle \langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \quad (1)$$

$$\langle \psi_n^0 | O | \psi_n^0 \rangle + \lambda \text{Re} \sum_{m \neq n} \langle \psi_n^0 | O | \psi_m^0 \rangle \langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \quad (2)$$

$$\langle \psi_n^0 | O | \psi_n^0 \rangle + \lambda \langle \psi_n^0 | O | \psi_n^0 \rangle \langle \psi_n^0 | H' | \psi_n^0 \rangle \quad (3)$$

$$\langle \psi_n^0 | O | \psi_n^0 \rangle + \lambda \text{Re} \sum_{m \neq n} \frac{\langle \psi_n^0 | O | \psi_m^0 \rangle \langle \psi_m^0 | H' | \psi_n^0 \rangle}{E_n^0 - E_m^0} \quad (4)$$

۱۵- با استفاده از تابع موج آزمون:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ax & 0 \leq x \leq a/2 \\ A(a-x) & a/2 \leq x \leq a \\ 0 & x > a, x < 0 \end{cases}$$

چه حد بالایی برای انرژی حالت پایه چاه بی‌نهایت یک‌بعدی که دیواره‌های آن در  $x=0$  و  $x=a$  قرار دارند، به دست می‌آید؟

$$\frac{\sqrt{2} \hbar^2}{ma^2} \quad (1)$$

$$\frac{\sqrt{3} \hbar^2}{ma^2} \quad (2)$$

$$\frac{\sqrt{6} \hbar^2}{ma^2} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{3} \hbar^2}{2ma^2} \quad (4)$$

۱۶- یک کره رسانا به شعاع  $R$  در میدان الکتریکی یکنواخت  $\vec{E} = E_0 \hat{k}$  قرار دارد. پتانسیل الکتریکی در خارج از این رسانا در مختصات کروی به صورت:

$$V(r, \theta) = -E_0 \left( r - \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + C \left( 1 - \frac{R}{r} \right)$$

داده می‌شود که در آن  $C$  ضریبی ثابت و مبدأ مختصات بر مرکز کره منطبق است. اگر بار کل رسانا برابر  $Q$  باشد، ثابت  $C$  کدام است؟

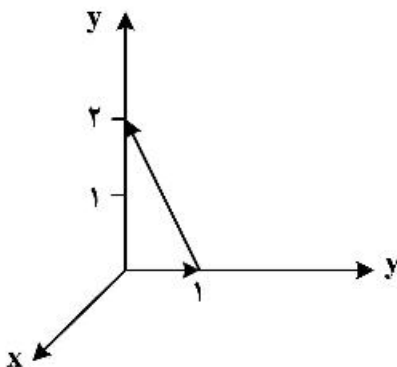
$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (1)$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (2)$$

$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{3}{2} E_0 R \quad (3)$$

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{3}{2} E_0 R \quad (4)$$

۱۷- مقدار انتگرال خطی بردار  $\vec{E} = 6x\hat{i} + yz^2\hat{j} + (3y+z)\hat{k}$  روی مسیر بسته مثلث نشان داده در شکل زیر کدام است؟



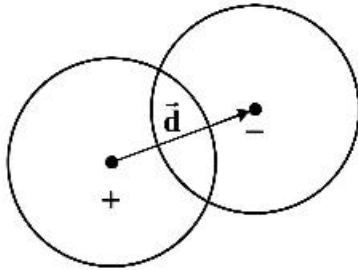
$$\frac{61}{24} \quad (1)$$

$$\frac{23}{12} \quad (2)$$

$$\frac{17}{3} \quad (3)$$

$$\frac{8}{3} \quad (4)$$

۱۸- دو کره هر یک به شعاع  $R$  با چگالی بار حجمی یکنواخت  $+\rho_0$  و  $-\rho_0$  طوری قرار گرفته‌اند که مطابق شکل زیر با یکدیگر هم‌پوشانی دارند. بردار  $\vec{d}$  مرکز این دو کره را به هم وصل می‌کند و جهت آن از سمت کره مثبت به کره منفی است. میدان الکتریکی در ناحیه‌ای که دو کره با یکدیگر هم‌پوشانی دارند کدام است؟ ( $\vec{r}$  بردار مکان نقطه‌ای داخل ناحیه هم‌پوشانی نسبت به مرکز کره مثبت است.)



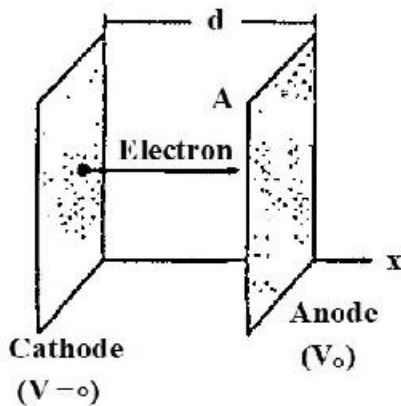
$$\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \vec{d} \quad (۱)$$

$$\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0 d} \vec{d} \quad (۲)$$

$$\frac{\rho_0 d}{3\epsilon_0 r} \vec{r} \quad (۳)$$

$$\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} (\vec{d} - \vec{r}) \quad (۴)$$

۱۹- در شکل زیر الکترون‌ها از کاتد داغ (در پتانسیل صفر) با تندی صفر جدا شده و به سمت آند (با پتانسیل  $+V_0$ ) حرکت می‌کنند. در شرایطی که میدان الکتریکی روی صفحه کاتد برابر صفر می‌شود و جریان یکنواخت و همگن  $I$  در کل فضای میان دو صفحه ایجاد می‌شود. معادله‌ای که  $V(x)$  پتانسیل یک نقطه در میان دو صفحه را تعیین می‌کند، کدام است؟ (ابعاد دو صفحه نسبت به فاصله آن دو از هم بسیار بزرگ‌تر است و مساحت هر یک از دو صفحه  $A$ ، فاصله دو صفحه از هم  $d$ ، جرم الکترون  $m$  و بار الکترون  $-e$  است.)



$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{Id}{\epsilon_0 A} \sqrt{\frac{m}{e}} \frac{1}{\sqrt{V(x)}} \quad (۱)$$

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{I}{3\epsilon_0 A} \sqrt{\frac{m}{e}} \frac{1}{V(x)} \quad (۲)$$

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{I}{\epsilon_0 A} \sqrt{\frac{m}{e}} \frac{1}{\sqrt{V(x)}} \quad (۳)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = \frac{Id}{\epsilon_0 A} \sqrt{\frac{m}{e}} \frac{1}{\sqrt{V(x)}} \quad (۴)$$



۲۰- پتانسیل الکتریکی روی سطح کره‌ای به شعاع  $R$  توسط رابطه  $V = \beta \cos^2 \theta$  داده شده است که  $\beta$  ضریبی ثابت است و مبدأ مختصات منطبق بر مرکز کره، محور  $Z$  در امتداد یکی از قطرهای کره و  $\theta$  زاویه با محور  $Z$  است. پتانسیل الکتریکی در نقاط داخل کره در مختصات کروی کدام است؟

$$P_r(x) = \frac{1}{r^2} (\Delta x^2 - r^2 x)$$

$$V(r, \theta) = \frac{-r^2 \beta}{R} r \cos \theta + \frac{r^2 \beta}{\Delta R^2} r^2 \cos^2 \theta \quad (1)$$

$$V(r, \theta) = \frac{-r^2 \beta}{R} r \cos \theta + \frac{r^2 \beta}{R^2} (\Delta \cos^2 \theta - r^2 \cos \theta) \quad (2)$$

$$V(r, \theta) = \frac{-r^2 \beta}{\Delta R} r \cos \theta + \frac{r^2 \beta}{R^2} r^2 \cos^2 \theta \quad (3)$$

$$V(r, \theta) = \frac{-r^2 \beta}{\Delta R} r \cos \theta + \frac{r^2 \beta}{\Delta R^2} r^2 (\Delta \cos^2 \theta - r^2 \cos \theta) \quad (4)$$

۲۱- در مسئله ۲۰ ممان دوقطبی الکتریکی کره کدام است؟

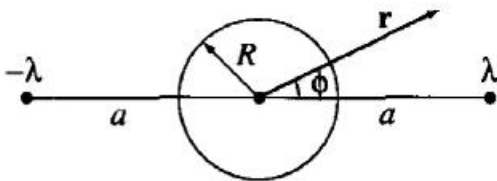
$$-\frac{r^2}{\Delta} \beta R^2 \hat{z} \quad (1)$$

$$\frac{r^2}{\Delta} \beta R^2 \hat{z} \quad (2)$$

$$\frac{r^2 \pi \epsilon_0}{\Delta} \beta R^2 \hat{z} \quad (3)$$

$$-\frac{r^2 \pi \epsilon_0}{\Delta} \beta R^2 \hat{z} \quad (4)$$

۲۲- دو سیم مستقیم بسیار بلند با چگالی بار طولی  $\lambda$  و  $-\lambda$  مطابق شکل زیر دو طرف یک استوانه بسیار بلند رسانای بدون بار الکتریکی و شعاع  $R$  قرار گرفته‌اند. فاصله هر سیم از محور استوانه برابر  $a$  است به طوری که  $a > R$ . پتانسیل الکتریکی در نقطه‌ای خارج استوانه با مختصات استوانه‌ای  $(r, \phi)$  کدام است؟



$$V(r, \phi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi)(R^2 + r^2 a^2 - 2R^2 a \cos \phi)}{(a^2 + r^2 + 2ar \cos \phi)(R^2 + r^2 a^2 + 2R^2 a \cos \phi)} \right) \quad (1)$$

$$V(r, \phi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{(a^2 + r^2 + 2ar \cos \phi)(R^2 + r^2 a^2 - 2R^2 a \cos \phi)}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi)(R^2 + r^2 a^2 + 2R^2 a \cos \phi)} \right) \quad (2)$$

$$V(r, \phi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi)(R^2 + r^2 + 2R^2 r \cos \phi)}{(a^2 + r^2 + 2ar \cos \phi)(R^2 + r^2 - 2R^2 r \cos \phi)} \right) \quad (3)$$

$$V(r, \phi) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{(a^2 + r^2 + 2ar \cos \phi)(R^2 + r^2 + 2R^2 r \cos \phi)}{(a^2 + r^2 - 2ar \cos \phi)(R^2 + r^2 - 2R^2 r \cos \phi)} \right) \quad (4)$$

۲۳- پتانسیل برداری در داخل و خارج از کره‌ای به شعاع  $R$  در مختصات کروی به شکل زیر داده شده است:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{cases} \alpha R r \sin \theta \hat{\phi} & r \leq R \\ \alpha R^2 \frac{1}{r^2} \sin \theta \hat{\phi} & r \geq R \end{cases}$$

که  $\alpha$  ضریبی ثابت است. اگر  $\vec{B}_1$  میدان مغناطیسی در داخل کره و  $\vec{B}_2$  میدان مغناطیسی در خارج کره باشد، کدام رابطه درست است؟

$$\vec{B}_2 \cdot \hat{r} - \vec{B}_1 \cdot \hat{r} = 3\alpha R \sin \theta \quad \text{for } r = R \quad (1)$$

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{\theta} = \vec{B}_2 \cdot \hat{\theta} = 2\alpha R \cos \theta \quad \text{for } r = R \quad (2)$$

$$\vec{B}_2 \cdot \hat{\theta} - \vec{B}_1 \cdot \hat{\theta} = \alpha R \sin \theta \quad \text{for } r = R \quad (3)$$

$$\vec{B}_1 \cdot \hat{r} = \vec{B}_2 \cdot \hat{r} = 2\alpha R \cos \theta \quad \text{for } r = R \quad (4)$$

۲۴- موج الکترومغناطیسی یکنواختی در جهت  $+z$  حرکت می‌کند و میدان الکتریکی آن برابر است با:

$$\vec{E} = 10 \sin(\omega t - \beta z) \hat{i} + 20 \cos(\omega t - \beta z) \hat{j}$$

که  $\omega$  و  $\beta$  ضریب‌هایی ثابت هستند. این موج در مسیر حرکت خود با صفحه رسانای کامل تختی واقع در  $z = 0$  برخورد می‌کند. بردار چگالی جریان سطحی روی صفحه رسانای کامل کدام است؟

$$\vec{K} = \frac{20\beta}{\mu_0 \omega} (-\sin \omega t \hat{i} - 2 \cos \omega t \hat{j}) \quad (1)$$

$$\vec{K} = \frac{10\beta}{\mu_0 \omega} (\sin \omega t \hat{i} - 2 \cos \omega t \hat{j}) \quad (2)$$

$$\vec{K} = \frac{20\beta}{\mu_0 \omega} (\sin \omega t \hat{i} + 2 \cos \omega t \hat{j}) \quad (3)$$

$$\vec{K} = \frac{10\beta}{\mu_0 \omega} (-\sin \omega t \hat{i} + 2 \cos \omega t \hat{j}) \quad (4)$$

۲۵- یک میله استوانه‌ای بلند با سطح مقطع  $A$  دارای مغناطش یکنواخت  $\vec{M}$  در امتداد محور استوانه است. این میله از یک قاعده در مقابل یک سطح تخت با نفوذپذیری بی‌نهایت ( $\mu \gg 1$ ) قرار می‌گیرد. نیرویی که به میله وارد می‌شود از چه نوعی و مقدار تقریبی آن در سیستم گاوسین کدام است؟

$$(1) \text{ دافعه، } 2\pi A M^2$$

$$(2) \text{ جاذبه، } 2\pi A M^2$$

$$(3) \text{ جاذبه، } 2\pi M^2 / A$$

$$(4) \text{ دافعه، } 2\pi M^2 / A$$

۲۶- با فرض آن که بار الکتریکی تحت اثر وارونی مکان (پارینه) و وارونی زمان ناوردا است. کدام عبارت نادرست است؟

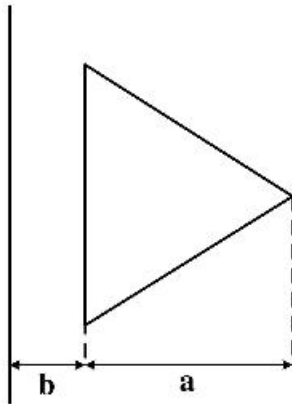
(1) بردار جابجایی  $\vec{D}$  تحت وارونی مکان فرد و تحت وارونی زمان زوج است.

(2) بردار پوینتینگ  $\vec{S}$  تحت وارونی مکان فرد و تحت وارونی زمان زوج است.

(3) بردار چگالی جریان  $\vec{J}$  تحت وارونی مکان فرد و تحت وارونی زمان فرد است.

(4) بردار مغناطش  $\vec{M}$  تحت وارونی مکان زوج و تحت وارونی زمان فرد است.

۲۷- القای متقابل میان یک سیم رسانای مستقیم بسیار بلند و یک حلقه سیم به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع که مطابق شکل زیر در یک صفحه قرار دارند، کدام است؟ (a ارتفاع مثلث و b فاصله ضلع موازی با سیم مستقیم تا آن سیم، است.)



$$\frac{\mu_0 \sqrt{3}}{\pi} \left( (a+b) \ln \frac{a+b}{a} - b \right) \quad (1)$$

$$\frac{\mu_0 \sqrt{3}}{\pi} \left( (a+b) \ln \frac{a+b}{b} - a \right) \quad (2)$$

$$\frac{\mu_0}{\pi \sqrt{3}} \left( (a+b) \ln \frac{a+b}{a} - b \right) \quad (3)$$

$$\frac{\mu_0}{\pi \sqrt{3}} \left( (a+b) \ln \frac{a+b}{b} - a \right) \quad (4)$$

۲۸- شار چگالی جریان کل  $\left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$  از یک سطح بسته S چقدر است؟

(۱) همواره برابر صفر است.

(۲) همواره برابر غیر صفر است.

(۳) همواره با جریان خارج شونده از سطح بسته برابر است.

(۴) همواره با جریان خالص خارج شونده از سطح بسته برابر است.

۲۹- در ناحیه‌ای از فضا که خالی از چشمه بار و جریان الکتریکی است، میدان مغناطیسی برابر است با:

$$\vec{H}(x, y, t) = \sin(\alpha x) \sin(\beta y) \cos(\omega t) \hat{i}$$

که  $\omega$ ،  $\alpha$  و  $\beta$  ضریب‌های ثابتی هستند. برای آن که این میدان مغناطیسی در معادله‌های ماکسول صدق کند،

چه رابطه‌ای میان این ضریب‌های ثابت باید وجود داشته باشد؟ ( $\epsilon$  و  $\mu$  به ترتیب ضریب‌های گذردهی الکتریکی و

نفوذپذیری مغناطیسی ثابت در ناحیه مورد نظر هستند.)

$$\alpha^2 + \beta^2 - \epsilon \mu \omega^2 = 0 \quad (1)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \epsilon \mu \omega^2 = 0 \quad (2)$$

$$(\alpha + \beta)^2 - \epsilon \mu \omega^2 = 0 \quad (3)$$

$$(\alpha + \beta)^2 + \epsilon \mu \omega^2 = 0 \quad (4)$$

۳۰- توان تشعشعی در واحد زاویه فضایی برای ذره‌ای با بار الکتریکی  $q$  که روی یک خط مستقیم با سرعت  $\vec{v}$  و شتاب  $\vec{a}$  در حرکت است توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2 c^3}{16\pi^2 \epsilon_0} \frac{|\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{a})|^2}{(c - \hat{n} \cdot \vec{v})^5}$$

توان کل تابشی از این ذره باردار کدام است؟  $\hat{n}$  برداریکه در امتداد محل مشاهده،  $c$  تنیدی نور در خلا و

$$\gamma = \left(1 - (v/c)^2\right)^{-1/2} \text{ است.}$$

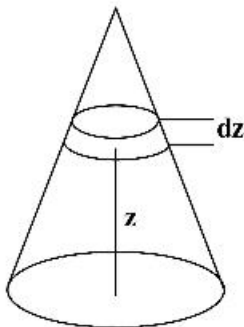
$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^4}{4\pi c} \quad (1)$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{2\pi c} \quad (2)$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^6}{6\pi c} \quad (3)$$

$$P = \frac{\mu_0 q^2 a^2 \gamma^2}{2\pi c} \quad (4)$$

۳۱- مطابق شکل، داخل حجم مخروطی به شعاع قاعده  $R$  و ارتفاع  $H$  هوا با توزیع یکنواخت وجود دارد. احتمال اینکه یک ذره هوا درون قرص نازکی به ضخامت  $dz$  در ارتفاع  $z$  از قاعده مخروط یافت شود، کدام است؟



$$\frac{\pi(H-z)dz}{H^2} \quad (1)$$

$$\frac{\pi(H-z)^2 dz}{H^2} \quad (2)$$

$$\frac{\pi(H-z)^2 dz}{2H^2} \quad (3)$$

$$\frac{\pi(H-z)dz}{2H^2} \quad (4)$$

۳۲- برای تابع احتمال دو جمله‌ای داده شده در زیر، مقدار متوسط  $\overline{n}$  کدام است؟

$$P(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}, \quad 0 \leq n \leq N$$

$$Npq + N^2 p^2 \quad (1)$$

$$Npq + N^2 q^2 \quad (2)$$

$$Np^2 q + N^2 p \quad (3)$$

$$Np^2 q + N^2 q \quad (4)$$

۳۳- ۶ ذره تمیزپذیر می‌توانند سه تراز انرژی را اشغال کنند. هر یک از ترازها می‌تواند با ۲ ذره اشغال شود. اگر تبهگنی هر یک از سه تراز ۲ باشد، چند امکان برای اشغال شدن این ترازها به وسیله این ذرات وجود دارد؟

(۱) ۷۲۰

(۲) ۵۷۶۰

(۳) ۴۶۰۸۰

(۴) ۱۱۵۲۰

۳۴- ظرفیت گرمایی در حجم ثابت یک گاز تابع آمار بوز - اینشتین، در زیر دمای چگالش،  $T_c$ ، کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{2} N k (T_c / T)^{3/2}$

(۲)  $\frac{1}{2} N k (T_c / T)^{3/2}$

(۳)  $\frac{1}{2} N k (T / T_c)^{3/2}$

(۴)  $\frac{1}{2} N k (T / T_c)^{3/2}$

۳۵- آنتروپی یک گاز ایدئال تک‌اتمی متشکل از ذراتی به جرم  $m$  در حجم  $V$  و دمای  $T$  به صورت

$n_Q(T) = \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$  پتانسیل شیمیایی این گاز کدام است؟  $S = Nk \left[ \ln \left( \frac{V n_Q(T)}{N} \right) + \frac{5}{2} \right]$  است که

(۱)  $-kT \ln \left( \frac{V n_Q(T)}{N} \right)$

(۲)  $-\frac{kT}{2} \ln \left( \frac{V n_Q(T)}{N} \right)$

(۳)  $-kT \left[ \ln \left( \frac{V n_Q(T)}{N} \right) + \frac{3}{2} \right]$

(۴)  $-\frac{kT}{2} \left[ \ln \left( \frac{V n_Q(T)}{N} \right) + \frac{3}{2} \right]$

۳۶- تغییر آنتروپی یک مول گاز ایدئال تک‌اتمی در تحولی از حالت تعادل اولیه  $(T, V)$  به حالت تعادل نهایی  $\left( 2T, \frac{V}{2} \right)$

بر حسب ثابت گازها،  $R$ ، چقدر است؟

(۱)  $R \ln 2$

(۲)  $\frac{3}{2} R \ln 2$

(۳)  $\frac{R}{2} \ln 2$

(۴)  $2R \ln 2$

۳۷- هامیلتونی دستگاهی متشکل از  $N$  نوسانگر هماهنگ ساده سه‌بعدی  $\left( \frac{\bar{p}_i \cdot \bar{p}_i}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \bar{r}_i \cdot \bar{r}_i \right)$  است.  $H = \sum_{i=1}^N$

در مجموعه آماری کانونیک که دستگاه در تعادل گرمایی با منبعی به دمای  $T$  است، انرژی داخلی این دستگاه کدام است؟ (نوسانگرها را کلاسیکی در نظر بگیرید.)

$$\frac{1}{2} NkT \quad (۱)$$

$$NkT \quad (۲)$$

$$\frac{3}{2} NkT \quad (۳)$$

$$3NkT \quad (۴)$$

۳۸- تابع پارش یک دستگاه ترمودینامیکی هیدروستاتیکی شامل  $N$  ذره در حجم  $V$ ، در مجموعه آماری کانونیک که دستگاه در تعادل گرمایی با منبعی به دمای  $T$  قرار دارد،  $Q(N, T, V)$  است. آنتالپی دستگاه برحسب تابع پارش، دما، حجم و فشار  $P$  کدام است؟

$$kT^2 \left( \frac{\partial \ln Q}{\partial T} \right)_{N,V} + PV \quad (۱)$$

$$NkT^2 \left( \frac{\partial \ln Q}{\partial T} \right)_{N,V} + PV \quad (۲)$$

$$kT^2 \left( \frac{\partial \ln Q}{\partial T} \right)_{N,V} - PV \quad (۳)$$

$$NkT^2 \left( \frac{\partial \ln Q}{\partial T} \right)_{N,V} - PV \quad (۴)$$

۳۹- تابع پارش یک دستگاه ترمودینامیکی در مجموعه آماری کانونیک  $Q = \sum_i g_i \exp(-\beta E_i)$  است. مقدار  $\langle E^2 \rangle$

کدام است؟  $\left( \beta = \frac{1}{kT} \right)$

$$\frac{k^2 T^4}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial T^2} \quad (۱)$$

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial \beta^2} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta^2} \quad (۳)$$

$$\frac{k^2 T^4}{Q} \frac{\partial^2 \ln Q}{\partial T^2} \quad (۴)$$

۴۰- یک دستگاه ترمودینامیکی بسته (مجموعه آماری میکروکانونیک) شامل  $N$  ذره با انرژی داخلی  $U$  در نظر بگیرید. هر ذره می‌تواند در یکی از سه حالت  $\theta = 0$ ،  $\theta = \frac{\pi}{2}$  و  $\theta = \frac{-\pi}{2}$  با انرژی  $E(\theta) = E_0 \sin^2 \theta$  باشد. چندگانگی دستگاه،  $\Omega(N, U)$ ، کدام است؟

$$(1) \frac{N!}{2^N (U/E_0)! (N - U/E_0)!}$$

$$(2) \frac{2^{(N-U/E_0)} N!}{(U/E_0)! (N - U/E_0)!}$$

$$(3) \frac{2^N N!}{(U/E_0)! (N - U/E_0)!}$$

$$(4) \frac{2^{(U/E_0)} N!}{(U/E_0)! (N - U/E_0)!}$$

۴۱- انرژی داخلی یک دستگاه شامل  $N$  ذره هر یک دارای ممان دوقطبی مغناطیسی  $\mu_B$  در میدان مغناطیسی خارجی  $\vec{B}$ ، در دمای  $T$  به صورت  $U = -N \mu_B B \tanh\left(\frac{\mu_B B}{kT}\right)$  است. ظرفیت گرمایی این دستگاه در دماهای بالا بر حسب  $\theta = \frac{2\mu_B B}{k}$  کدام است؟

$$(1) \frac{Nk}{4} \left(\frac{\theta}{T}\right)$$

$$(2) \frac{Nk}{2} \left(\frac{\theta}{T}\right)^2$$

$$(3) \frac{Nk}{4} \left(\frac{\theta}{T}\right)^2$$

$$(4) \frac{Nk}{2} \left(\frac{\theta}{T}\right)$$

۴۲- انرژی داخلی دستگاهی متشکل از  $N$  فرمیون یکسان بدون برهم‌کنش با اسپین  $\frac{1}{2}$  و غیرنسبیتی، محصور در حجم  $V$  در دمای  $T$  بر حسب انرژی فرمی  $\epsilon_f$  کدام است؟

$$(1) \frac{3}{5} N \epsilon_f \left[ 1 + \frac{\Delta \pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_f}\right) + \dots \right]$$

$$(2) \frac{3}{5} N \epsilon_f \left[ 1 + \frac{\Delta \pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_f}\right)^2 + \dots \right]$$

$$(3) \frac{3}{2} N \epsilon_f \left[ 1 + \frac{\Delta \pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_f}\right)^2 + \dots \right]$$

$$(4) \frac{3}{2} N \epsilon_f \left[ 1 + \frac{\Delta \pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_f}\right) + \dots \right]$$

۴۳- جرم مولی لیتیوم  $6.9 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$  و چگالی آن  $0.53 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  است. دمای فرمی لیتیوم برحسب کلونین به کدام دما نزدیک‌تر است؟

$$k = 1.38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} \text{ و } N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}, m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}, h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

(۱) ۵۰

(۲) ۵۰۰

(۳) ۵۰۰۰

(۴) ۵۰۰۰۰

۴۴- سرعت ریشه میانگین مجذوری  $v_{\text{rms}}$  ذرات یک گاز کلاسیک متشکل از ذراتی به جرم  $m$  در دمای  $T$  کدام است؟

$$(1) \sqrt{3kT/m}$$

$$(2) \sqrt{2kT/m}$$

$$(3) \sqrt{8kT/\pi m}$$

$$(4) \sqrt{3kT/2m}$$

۴۵- نمایش عناصر ماتریس چگالی در پایه‌های فضای مکان  $\langle x | \rho | x' \rangle$ ، برای یک ذره آزاد به جرم  $m$  محصور در یک

بعد بین  $x=0$  و  $x=L$  در دمای  $T$  کدام است؟  $\left( \beta = \frac{1}{kT} \right)$

$$(1) L \frac{d^2}{dx^2} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta \hbar^2} (x-x')^2 \right]$$

$$(2) \frac{1}{L} \exp \left[ -\frac{m}{2\beta \hbar^2} (x-x')^2 \right]$$

$$(3) \frac{1}{L} \exp \left[ -\frac{mL}{2\beta \hbar^2} |x-x'| \right]$$

$$(4) L \frac{d^2}{dx^2} \exp \left[ -\frac{mL}{2\beta \hbar^2} |x-x'| \right]$$



## مشاهده کلید اولیه سوالات آزمون دکتری 1401

کلید اولیه آزمون دکتری سال 1401

به اطلاع می‌رساند، کلید اولیه سوالات که در این سایت قرار گرفته است، غیر قابل استناد است و پس از دریافت نظرات داوطلبان و صاحب نظران کلید نهایی سوالات تهیه و بر اساس آن کارنامه داوطلبان استخراج خواهد شد. در صورت تمایل می‌توانید حداکثر تا تاریخ 1400/12/17 با مراجعه به سامانه پاسخگویی اینترنتی (request.sanjesh.org) نسبت به تکمیل فرم "اعتراض به کلید سوالات" / "آزمون دکتری سال 1401" اقدام نمایید. لازم به ذکر است نظرات داوطلبان فقط تا تاریخ مذکور و از طریق فرم ذکر شده دریافت خواهد شد و به موارد ارسالی از طریق دیگر (نامه مکتوب یا فرم عمومی در سامانه پاسخگویی و ...) با پس از تاریخ اعلام شده رسیدگی نخواهد شد.

عنوان دفترچه	نوع دفترچه	شماره پاسخنامه	گروه امتحانی
فیزیک	F	1	علوم پایه

شماره سوال	گزینه صحیح	شماره سوال	گزینه صحیح
1	4	31	2
2	2	32	1
3	1	33	2
4	1	34	4
5	4	35	1
6	2	36	3
7	3	37	4
8	2	38	1
9	4	39	3
10	3	40	4
11	4	41	3
12	3	42	2
13	1	43	4
14	4	44	1
15	3	45	2
16	1		
17	4		
18	1		
19	3		
20	4		
21	3		
22	2		
23	4		
24	3		
25	2		
26	2		
27	4		
28	1		
29	1		
30	3		

خروج